

جامعة القاهرة
كلية التجارة



الإحصاء في مجال الأعمال



أ.د/ شوقي سيف النصر سيد
أ.د/ على سيد الديب
د/ مروة رفيق جلال

الإحصاء فى مجال الأعمال

Business Statistic

تأليف

أ. د. شوقى سيف النصر سيد أ. د. على السيد الديب

د. مر وة رفيق جلال

قسم التأمين والعلوم الإكتوارية

كلية التجارة – جامعة القاهرة

٢٠١٧ – ٢٠١٨

تقـــديم

علم الإحصاء هو علم تجميع وتنظيم البيانات والمعلومات وتلخيصها فى مقاييس ومؤشرات لإظهار معالمها وخصائصها وتحديد العلاقات بين الظواهر المختلفة ، وتفسير الحقائق والأمور غير الظاهرة ، والتنبؤ بالمستقبل ، لذلك يعتبر علم الإحصاء أداة هامة من أدوات البحث العلمى وضرورى لكافة العلوم الإنسانية والطبيعية ، والاهتمام بتطور وتقدم علم الإحصاء واستخدامه فى التخطيط والمتابعة أساس هام لتطور ونجاح المنظمات والمشروعات المختلفة.

ويحتوى هذا المرجع على دراسة متكاملة لأساسيات علمى الإحصاء الوصفى والإحصاء التحليلى ، وتمت هذه الدراسة فى ثمانية أبواب مختلفة، يختص الباب الأول منها بدراسة المتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية ، ويختص الباب الثانى بدراسة مقاييس التشتت ، ويختص الباب الثالث بدراسة الارتباط والانحدار ، ويختص الباب الرابع بدراسة السلاسل الزمنية ، ويختص الباب الخامس بدراسة الأرقام القياسية ، وهذه الأبواب الخمسة هى عصب علم الإحصاء الوصفى وقد قام بتأليفها وإعدادها أ. د. شوقى سيف النصر سيد ، كما يختص الباب السادس بدراسة التوزيعات الاحتمالية ، ويختص الباب السابع بدراسة نظرية العينات والتقدير ، ويعتبر البابان السادس والسابع هما عصب علم الإحصاء التحليلى وقد قام بتأليفهما وإعدادهما أ. د.على السيد الديب. وعتبر الباب الثامن هو عصب علم الإحصاء السكانى والحيوى وقد قام بتأليفه وإعداده د. مروة رفيق جلال

ونأمل بهذا المرجع أن يكون فيه إضافة لمكتبة الإحصاء الغنية بالكثير من المراجع العلمية الهامة ، وأن يكون فى هذا المرجع دعم وإضافة للباحثين فى مختلف مجالات البحث العلمى

والله ولى التوفيق ،،،

المؤلفون

الباب الأول
مقاييس النزعة المركزية
(المتوسطات)

الفصل الأول: الوسط الحسابى

الفصل الثانى: الوسيط

الفصل الثالث: المنوال



الفصل الأول
الوسط الحسابى
Arithmetic Mean

خصائص الوسط الحسابى:

١. سهل الحساب وهو أكثر المقاييس شيوعاً واستخداماً.

٢. يأخذ عند الحساب جميع مفردات العينة أو المجتمع موضوع الدراسة وبالتالى يتأثر بجميع القيم وخاصةً القيم المتطرفة ، وبالتالى لا ينصح باستخدامه فى حالة وجود هذه القيم وفى حالة التوزيعات الحادة أو شديدة الالتواء.

٣. يمكن حسابه دون معرفة تفاصيل القيم بل يكفى معرفة مجموعها فقط.

٤. يخضع للعمليات الجبرية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) بحيث يتأثر بها ولابد من مراعاة ذلك عند استخدام هذه العمليات فى التبسيط والحساب.

٥. لا يحتاج لتعديل أطوال الفئات فى حالة اختلافها.

٦. لايمكن حسابه بالرسم.

٧. لا يصلح إلا فى حالة الجداول التكرارية المقفلة ولا يصلح فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

٨. مجموع الانحرافات أو الفروق بين القيم الأصلية والوسط الحسابى يساوى صفر.

٩. يحقق شروط المقياس الإحصائى الجيد من حيث عدم التحيز والكفاءة والاتساق وانخفاض مستوى التباين.

١٠. مجموع مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى يقل عن مجموع مربعات إنحرافات القيم عن أى متوسط آخر (انخفاض مستوى التباين)

أولاً: البيانات غير المبوبة:

(١) الوسط الحسابى البسيط: Simple Arithmetic Mean

يمكن تعريف الوسط الحسابى بأنه مجموع القيم أو المشاهدات أو القراءات مقسوماً على عددها.

فإذا فرضنا أن لدينا المتغير س الذى يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، .... ، س_ن$

وإذا رمزنا للوسط الحسابى لهذه القيم بالرمز $\overline{س}$ فإن:

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ر=ن} س_ر}{ن}$$

ويمكن كتابة الصيغة السابقة باختصار كما يلى:

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـ}\,س}{ن}$$

مثال:

احسب الوسط الحسابى للقيم التالية:

١٠ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٢

الحل:

$$\overline{س} = \frac{١٠+١٥+١٢+١٨+٢٨+٢٥+٣٠+٢٢}{٨} = \frac{١٦٠}{٨}$$

$$\therefore \overline{س} = ٢٠$$

الطرق المختصرة للوسط الحسابى:

(أ) الجمع والطرح:

يمكن الوصول للوسط الحسابى عن طريق إضافة أو طرح وسط فرضى يحدده الباحث وخاصة إذا كانت الأرقام كبيرة وإذا فرضنا أننا سنقوم بطرح وسط فرضى من جميع الأرقام ثم نقوم بحساب الوسط الحسابى للفروق أو الانحرافات بين القيم الأصلية والوسط الفرضى ثم نعود لإضافة الوسط الفرضى المستبعد على الناتج النهائى فنحصل على الوسط الحسابى الحقيقى للبيانات ، وليس هناك قاعدة ثابتة لاختيار الوسط الفرضى فقد يكون أكثر الأرقام تكراراً أو أكبر الأرقام أو أصغر رقم أو أى رقم متوسط موجود أو غير موجود فى البيانات فيتوقف ذلك على وجهة نظر الباحث والهدف من التبسيط.

حل المثال السابق بفرض أننا أخذنا وسط فرضى أ = ٢٥ فإن:

الانحرافات أو الفروق بين القيم الأصلية والوسط الفرضى هى:

−١٥ ، −١٠ ، −١٣ ، −٧ ، ٣ ، ٠ ، ٥ ، −٣

يكون متوسط الانحرافات السابقة $= \frac{-١٥-١٠-١٣-٧+٣+٠+٥-٣}{٨}$

$$= \frac{-٤٠}{٨} = -٥$$

∴ $\overline{س}$ =-٥ + ٢٥ = ٢٠ وهى نفس الإجابة السابقة

أى أنه يتم معالجة الناتج النهائى بالعملية العكسية تماماً لعملية التبسيط.

(ب) الضرب والقسمة:

يتاثر أيضاً الوسط الحسابى بعمليات الضرب والقسمة ، فإذا ضربنا جميع المشاهدات أو القيم فى رقم ثابت لابد أن نقسم الناتج النهائى على نفس الرقم للوصول لنفس الوسط الحسابى ، وكذلك لو قسمنا جميع المشاهدات أو القيم على رقم ثابت أو عامل مشترك لابد أن نضرب الناتج النهائى فى نفس الرقم للوصول لنفس الوسط الحسابى (أى نعالج الناتج النهائى دائماً بالعملية العكسية تماماً لعملية التبسيط).

(٢) الوسط الحسابى المرجح: Weighted Arithmetic Mean

يعتبر الوسط الحسابى البسيط دقيقاً إذا كانت مفردات العينة أو المجتمع لها نفس الأهمية النسبية أو لها نفس الوزن فى التوزيع ، ولكن إذا اختلفت الأهمية النسبية أو الأوزان لمفردات القيم لابد أن تؤخذ هذه الأوزان فى الاعتبار عند حساب الوسط الحسابى ويطلق عليه حينئذ الوسط الحسابى المرجح ويمكن تعريفه بأنه متوسط مجموع القيم أو المشاهدات مرجحاً بأوزانها.

فإذا فرضنا أن لدينا المتغير العشوائى س الذى يمكن أن يأخذ أحدالقيم أو المشاهدات التالية:

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$

وأن أوزان القيم السابقة هى على الترتيب:

$و_{١}$ ، $و_{٢}$ ، $و_{٣}$ ، .... ، $و_{ن}$ فإن:

$$\overline{س} = \frac{س_{١}و_{١} + س_{٢}و_{٢} + ... + س_{ن}و_{ن}}{و_{١} + و_{٢} + ... + و_{ن}}$$

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{ر=ن} س_{ر}و_{ر}}{\text{مجـ}_{ر=١}^{ر=ن} و_{ر}}$$

ويمكن كتابة الصيغة السابقة بإختصار كما يلى:

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـ} س و}{\text{مجـ} و}$$

<u>مثال:</u>

فيما يلى بيان بأسعار أنواع من السلع بالجنيه المصرى والكميات المقابلة لكل نوع بالكيلو:

الأسعار للكيلو بالجنيه المصرى	٢٠	٣٠	٥٠	٨٠
الكميات المعروضة بالكيلو لكل نوع	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠

المطلوب: احسب الوسط الحسابى البسيط للأسعار والوسط الحسابى المرجح للأسعار

الحل:

$$\text{الوسط الحسابى البسيط للأسعار} = \frac{٨٠+٥٠+٣٠+٢٠}{٤}$$

$$\overline{س} = \frac{١٨٠}{٤} \qquad \therefore \overline{س} = ٤٥$$

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للأسعار} = \frac{٢٠\times٨٠+٣٠\times٥٠+٤٠\times٣٠+٥٠\times٢٠}{٢٠+٣٠+٤٠+٥٠}$$

$$\overline{س} = \frac{٥٣٠٠}{١٤٠}$$

$$\therefore \overline{س} = ٣٧,٨٥٧$$

ويلاحظ انخفاض الوسط الحسابى المرجح عن الوسط الحسابى البسيط لأن الوزن المعطى للأرقام الكبيرة صغير أى أن تأثير الأرقام الكبيرة واضح على الوسط الحسابى البسيط ولكن مع أخذ أهميتها النسبية المنخفضة انخفض الوسط الحسابى المرجح وهو الأقرب للمنطق وأكثر دقة.

ثانياً: البيانات المبوبة فى جداول تكرارية:

(١) الطريقة المطولة:

يمكن تعريف الوسط الحسابى من جداول التوزيعات التكرارية بأنه الوسط الحسابى المرجح أو الموزون بالتكرارات ، وعند حسابه نلجأ لبعض التقريب حيث أننا نفترض أن جميع التكرارات داخل الفئة موزعة بإنتظام على مدى الفئة ولذلك نفترض أن جميع التكرارات تأخذ قيمة وحيدة داخل الفئة هى مركز الفئة ، وهذا التقريب يعطى نتائج دقيقة كلما كانت التكرارات الفعلية موزعة بإنتظام على مدار الفئة وليست مركزة فى

بدايتها أو فى نهايتها أو فى أى نقطة أخرى داخل الفئة ، وبالتالى يعتبر الوسط الحسابى هو متوسط مراكز الفئات المرجحة بالتكرارات ، وباستخدام القانون التالى الذى يحقق هذا التعريف:

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ر=ن} ك_ر س_ر}{\sum_{ر=1}^{ر=ن} ك_ر}$$

ويمكن إعادة كتابته بالصيغة المختصرة التالية:

$$\overline{س} = \frac{مجـ ك س}{مجـ ك}$$

<u>(٢) الطريقة المختصرة:</u>

وكما تعرضنا فى البيانات غير المبوبة عن إمكانية تبسيط قيم مراكز الفئات بإختصار أو تحديد وسط فرضى (أ) سواء كان أحد مراكز الفئات أصغرها أو أكبرها أو أوسطها أو مركز الفئة أمام أكبر تكرار أو أى رقم آخر يفترضه الباحث ، وكما سبق أن ذكرنا فإن الوسط الحسابى يتأثر بالوسط الفرضى طرحاً أو إضافة وبالتالى لابد من معالجة الناتج النهائى بالعملية الحسابية العكسية لهذا الوسط الفرضى كما يلى:

$$\overline{س} = \frac{مجـ ك ح}{مجـ ك} + أ$$

حيث ح تمثل الانحرافات بين مراكز الفئات والوسط الفرضى أى أن:

$$ح_ر = س_ر - أ$$

(٣) الطريقة المختصرة المختزلة:

وكما تعرضنا أيضاً فى البيانات غير المبوبة بأن الوسط الحسابى يتأثر بأى عامل اختزال بمعنى أن قسمة مراكز الفئات أو الانحرافات على عامل اختزال مشترك سواء كان هذا العامل هو طول الفئة فى الفئات المتساوية أو أى عامل مشترك آخر فى الفئات غير المتساوية ولنرمز لعامل الاختزال بالرمز (ط) ولابد من معالجة النتيجة النهائية بالعملية العكسية لمعامل الاختزال كما يلى:

$$\overline{س} = ط \times \frac{مجـ ك ح'}{مجـ ك} + أ$$

حيث $ح' = ح \div ط$

مثال (١):

احسب الوسط الحسابى للتوزيع التالى:

الفئات	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-٣٥
التكرارات	١٠	١٥	٣٥	٢٥	١٥

الحل:

١- الطريقة المطولة:

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	التكرارات × مراكز الفئات ك × س
١٠-	١٠	١٢,٥	١٢٥
١٥-	١٥	١٧,٥	٢٦٢,٥
٢٠-	٣٥	٢٢,٥	٧٨٧,٥
٢٥-	٢٥	٢٧,٥	٦٨٧,٥
٣٠-٣٥	١٥	٣٢,٥	٤٨٧,٥
	١٠٠ مجـ ك		٢٣٥٠ مجـ ك س

$$\overline{س} = \frac{مجـ ك س}{مجـ ك} = \frac{٢٣٥٠}{١٠٠}$$

∴ $\overline{س}$ = ٢٣,٥

٢- الطريقة المختصرة:

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	الانحرافات عن وسط فرضى ح= س - أ	التكرارات × مراكز الفئات ك × ح
١٠-	١٠	١٢,٥	-١٠	-١٠٠
١٥-	١٥	١٧,٥	-٥	-٧٥
٢٠-	٣٥	٢٢,٥	صفر	صفر
٢٥-	٢٥	٢٧,٥	٥	١٢٥
٣٠-٣٥	١٥	٣٢,٥	١٠	١٥٠
	١٠٠ مجـ ك			١٠٠ مجـ ك ح

بفرض أن الوسط الفرضى أ = ٢٢,٥ (مركز الفئة الوسطى)

$$\overline{س} = \frac{مجـ ك ح}{مجـ ك} + أ = \frac{١٠٠}{١٠٠} + ٢٢,٥ = ١ + ٢٢,٥$$

∴ $\overline{س}$ = ٢٣,٥

٣- الطريقة المختصرة المختزلة:

ف	ك	س	ح	الانحرافات المختزلة $\bar{ح}$ = ح ÷ ط	ك × $\bar{ح}$
١٠-	١٠	١٢,٥	١٠-	٢-	٢٠-
١٥-	١٥	١٧,٥	٥-	١-	١٥-
٢٠-	٣٥	٢٢,٥	صفر	صفر	صفر
٢٥-	٢٥	٢٧,٥	٥	١	٢٥
٣٠-٣٥	١٥	٣٢,٥	١٠	٢	٣٠
	١٠٠ مجـ ك				٢٠ مجـ ك $\bar{ح}$

حيث أ = ٢٢,٥ ، ط = ٥

$$\bar{س} = ط \times \frac{مجـ ك \bar{ح}}{مجـ ك} + أ$$

$$= ٥ \times \frac{٢٠}{١٠٠} + ٢٢,٥ = ١ + ٣٣,٥ = ٢٣,٥$$

مثال (٢):

المطلوب حساب متوسط الأجور للتوزيع التالى:

فئات الأجر	١٠٠-	١٢٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٣٠٠-٥٠٠
التكرارات	١٠٠	١٥٠	٨٠	٥٠	٢٠

الحل:

١- الطريقة المطولة:

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	التكرارات × مراكز الفئات ك × س
١٠٠-	١٠٠	١١٠	١١٠٠٠
١٢٠-	١٥٠	١٣٥	٢٠٢٥٠
١٥٠-	٨٠	١٧٥	١٤٠٠٠
٢٠٠-	٥٠	٢٥٠	١٢٥٠٠
٣٠٠-٥٠٠	٢٠	٤٠٠	٨٠٠٠
	٤٠٠ مجـ ك		٦٥٧٥٠ مجـ ك س

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٦٥٧٥٠}{٤٠٠} = ١٦٤,٣٧٥ \text{ جنيه}$$

٢- الطريقة المختصرة:

إذا أخذنا وسط فرضى من مراكز الفئات وليكن الرقم ١٧٥

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	الانحرافات عن وسط فرضى ح= س - أ	التكرارات × مراكز الفئات ك × ح
١٠٠-	١٠٠	١١٠	-٦٥	-٦٥٠٠
١٢٠-	١٥٠	١٣٥	-٤٠	-٦٠٠٠
١٥٠-	٨٠	١٧٥	صفر	صفر
٢٠٠-	٥٠	٢٥٠	٧٥	٣٧٥٠
٣٠٠- ٥٠٠	٢٠	٤٠٠	٢٢٥	٤٥٠٠
	٤٠٠ مجـ ك			-٤٢٥٠ مجـ ك ح

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك ح}}{\text{مجـ ك}} + \text{أ} = \frac{-٤٢٥٠}{٤٠٠} + ١٧٥$$

= -١٠,٦٢٥ + ١٧٥ = ١٦٤,٣٧٥ جنيه

٣- الطريقة المختصرة المختزلة:

ف	ك	س	ح	الانحرافات المختزلة ح َ = ح ÷ ط	ك × ح َ
-١٠٠	١٠٠	١١٠	-٦٥	-١٣	-١٣٠٠
-١٢٠	١٥٠	١٣٥	-٤٠	-٨	-١٢٠٠
-١٥٠	٨٠	١٧٥	صفر	صفر	صفر
-٢٠٠	٥٠	٢٥٠	٧٥	١٥	٧٥٠
٣٠٠-٥٠٠	٢٠	٤٠٠	٢٢٥	٤٥	٩٠٠
	٤٠٠ مجـ ك				-٨٥٠ مجـ ك ح َ

ملاحظة: ط هنا ليست طول الفئة ولكنها عامل مشترك قيمته = ٥ حيث أن كل الأرقام فى العمود ح تقبل القسمة على ٥

$$\bar{\text{س}} = \text{ط} \times \frac{\text{مجـ ك ح َ}}{\text{مجـ ك}} + \text{أ}$$

$$= ٥ \times \frac{-٨٥٠}{٤٠٠} + ١٧٥$$

= -١٠,٦٢٥ + ١٧٥

∴ $\bar{\text{س}}$ = ١٦٤,٣٧٥ جنيه

الفصل الثانى
الوسيط
Median

خصائص الوسيط:

١. سهل الحساب.
٢. لا يتأثر بالقيم المتطرفة لذلك فهو ممثل جيد للتوزيعات التى تحتوى على مثل هذه القيم لأن الوسيط لا يأخذ فى حسابه قيم المتغير كلها ولكنه يأخذ القيمة الوسطى فقط (الموجودة فى منتصف البيانات).
٣. يصلح الوسيط فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة من البداية أو من النهاية أو من الطرفين لأنه كما سبق أن ذكرنا يتأثر بالقيمة الوسطى فقط.
٤. لا يحتاج لتعديل التكرارات فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية.
٥. يمكن حسابه بالرسم والحساب.
٦. قيمته تقع محصورة دائماً بين الوسط الحسابى والمنوال.
٧. لا يعبر أو يمثل جميع القيم المختلفة للمتغير (س) تمثيلاً دقيقاً وخاصةً إذا كانت (ن) كبيرة الحجم لأن الوسيط كما سبق أن ذكرنا يتأثر بالقيمة الوسطى فقط.
٨. مجموع الانحرافات المطلقة للقيم المختلفة عن الوسيط أصغر ما يمكن بالمقارنة بمجموع الانحرافات المطلقة عن أى متوسط آخر غير الوسيط.

أولاً: البيانات غير المبوبة:

يمكن تعريف الوسيط بأنه القيمة التى تقسم مجموعة القيم أو المشاهدات إلى نصفين متساويين من ناحية العدد فقط وذلك بعد ترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً ، أى أن الوسيط هو المفردة أو القيمة الوسطى من جميع القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير العشوائى (س).

خطوات حساب الوسيط:

١. ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً.

٢. نحدد ترتيب الوسيط حيث:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{ن}+1}{2}$$

٣. نحدد قيمة الوسيط بالعد حسب الترتيب السابق ولنرمز لقيمة الوسيط بالرمز ($ر_{2}$)

مثال (١):

استخرج الوسيط للقيم التالية:

١٥ ، ١٨ ، ١٢ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٢٢

الحل:

أ – ترتيب القراءات ترتيباً تصاعدياً:

١ ٢ ٣ ٤ ٥

١٠ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، [٢٠] ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠

ب- ترتيب الوسيط = $\frac{ن+١}{٢}$

= $\frac{٩+١}{٢}$ = ٥

ج- قيمة الوسيط هو القراءة الخامسة:

∴ $ر_٢$ = ٢٠

<u>مثال (٢):</u>

استخرج الوسيط للقيم التالية:

٤ ، ١٠ ، ٨ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢٠ ، ١٢ ، ٢٤

<u>الحل:</u>

أ - ترتيب القراءات ترتيباً تنازلياً:

١ ٢ ٣ ٤ ٥

٢٤ ، ٢٠ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ٤

ب- ترتيب الوسيط = $\frac{ن+١}{٢}$ = $\frac{٨+١}{٢}$ = ٤,٥

ج- قيمة الوسيط تقع بين القراءتين الرابعة والخامسة أى بين القيمتين ١٤ ، ١٢ ويتم حساب الوسيط على أساس الوسط الحسابى البسيط للقيمتين السابقتين:

∴ $ر_٢$ = $\frac{١٤+١٢}{٢}$ = ١٣

ثانياً: البيانات المبوبة:

(١) الوسيط بالحساب

الخطوات:

١. نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط.
٢. نحدد ترتيب الوسيط حيث:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـــك}}{٢}$$

٣. نحدد التكراران المتجمعان اللذان يُحصر بينهما ترتيب الوسيط.
٤. نحدد الفئة الوسيطية المقابلة للتكراران المتجمعان السابقان.
٥. نحدد قيمة الوسيط داخل الفئة الوسيطية بالنسبة والتناسب وذلك بفرض أن التكرارات المتجمعة موزعة بانتظام داخل الفئات وبالتالى عن طريق الاستكمال الخطى يمكن استنتاج قيمة الوسيط باستخدام القوانين التالية.

باستخدام الجدول المتجمع الصاعد:

$$\text{قيم الوسيط } (ر_{٢}) = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \text{طول الفئة الوسيطية} \times \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية}}{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية} - \text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية}}$$

باستخدام الجدول المتجمع الهابط:

$$\text{قيم الوسيط } (ر_{٢}) = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \text{طول الفئة الوسيطية} \times \frac{\text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية} - \text{ترتيب الوسيط}}{\text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية} - \text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية}}$$

ملاحظة:

يمكن الوصول لقيمة الوسيط (ر٢) على أساس الحد الأعلى للفئة الوسيطية كما يلى:

باستخدام الجدول المتجمع الصاعد:

قيم الوسيط (ر٢) = الحد الأعلى للفئة الوسيطية − طول الفئة الوسيطية × $\frac{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية − ترتيب الوسيط}}{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية − تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية}}$

باستخدام الجدول المتجمع الهابط:

قيم الوسيط (ر٢) = الحد الأعلى للفئة الوسيطية − طول الفئة الوسيطية × $\frac{\text{ترتيب الوسيط − تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية}}{\text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية − تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية}}$

مثال (١):

استخرج الوسيط بالحساب للتوزيع التالى:

الفئات	١٠−	٢٠−	٣٠−	٤٠−	٥٠−٦٠
التكرارات	٥٠	٨٠	٤٠	٢٠	١٠

الحل الأول: عن طريق جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد:

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة	
١٠−	٥٠	أقل من ١٠	صفر	
٢٠−	٨٠	أقل من ٢٠	٥٠	تكرار الحد الأدنى
		ر٢ ←	١٠٠	ترتيب الوسيط
٣٠−	٤٠	أقل من ٣٠	١٣٠	تكرار الحد الأعلى
٤٠−	٢٠	أقل من ٤٠	١٧٠	
٥٠−٦٠	١٠	أقل من ٥٠	١٩٠	
	٢٠٠	٦٠ فأقل	٢٠٠	

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـــك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$$

$$ر_٢ = ٢٠ + ١٠ \times \frac{١٠٠-٥٠}{١٣٠-٥٠}$$

$$= ٢٠ + ١٠ \times \frac{٥٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_٢ = ٢٦,٢٥$$

كما يمكن حساب الوسيط باستخدام الحد الأعلى للفئة الوسيطية كما يلى:

$$ر_٢ = ٣٠ - ١٠ \times \frac{١٣٠-١٠٠}{١٣٠-٥٠}$$

$$= ٣٠ - ١٠ \times \frac{٣٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_٢ = ٢٦,٢٥$$

الحل الثاني: عن طريق جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط:

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الهابطة	التكرارات المتجمعة الهابطة	
١٠-	٥٠	١٠ فأكثر	٢٠٠	
٢٠-	٨٠	٢٠ فأكثر	١٥٠	تكرار الحد الأدنى
		$ر_٢$ ←	١٠٠	ترتيب الوسيط
٣٠-	٤٠	٣٠ فأكثر	٧٠	تكرار الحد الأعلى
٤٠-	٢٠	٤٠ فأكثر	٣٠	
٥٠-٦٠	١٠	٥٠ فأكثر	١٠	
	٢٠٠	أكثر من ٦٠	صفر	

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـــك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$$

$$ر_{٢} = ٢٠ + ١٠ \times \frac{١٥٠-١٠٠}{١٥٠-٧٠}$$

$$= ٢٠ + ١٠ \times \frac{٥٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_{٢} = ٢٦,٢٥$$

كما يمكن حساب الوسيط باستخدام الحد الأعلى للفئة الوسيطية كما يلى:

$$ر_{٢} = ٣٠ - ١٠ \times \frac{١٠٠-٧٠}{١٥٠-٧٠}$$

$$= ٣٠ - ١٠ \times \frac{٣٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_{٢} = ٢٦,٢٥$$

<u>مثال (٢):</u>

احسب الوسيط بالحساب للتوزيع التالى:

فئات	أقل من ٢٠	٢٠−	٣٠−	٥٠−	٨٠ فأكثر
تكرارات	١٥	٢٥	٣٠	٢٠	١٠

<u>الحل الأول: عن طريق جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد:</u>

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة
أقل من ٢٠	١٥	أقل من الحد الأدنى	صفر
٢٠−	٢٥	أقل من ٢٠	١٥
		أقل من ٣٠	٤٠
٣٠−	٣٠	ر٢ ←	٥٠
٥٠−	٢٠	أقل من ٥٠	٧٠
٨٠ فأكثر	١٠	أقل من ٨٠	٩٠
	١٠٠	الحد الأعلى فأقل	١٠٠

ترتيب الوسيط $= \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$

ر$_٢ = ٣٠ + ٢٠ \times \frac{٥٠ - ٤٠}{٧٠ - ٤٠}$

$= ٣٠ + ٢٠ \times \frac{١٠}{٣٠}$

$\therefore$ ر$_٢ = ٣٦,٦٧$

<u>الحل الثاني: عن طريق جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط:</u>

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الهابطة	التكرارات المتجمعة الهابطة
أقل من ٢٠	١٥	الحد الأدنى فأكثر	١٠٠
٢٠-	٢٥	٢٠ فأكثر	٨٥
		٣٠ فأكثر	٦٠
٣٠-	٣٠	ر$_٢$ ←	٥٠
٥٠-	٢٠	٥٠ فأكثر	٣٠
٨٠ فأكثر	١٠	٨٠ فأكثر	١٠
	١٠٠	أكثر من الحد الأعلى	صفر

ترتيب الوسيط $= \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$

ر$_٢ = ٣٠ + ٢٠ \times \frac{٦٠ - ٥٠}{٦٠ - ٣٠}$

$= ٣٠ + ٢٠ \times \frac{١٠}{٣٠}$

$\therefore$ ر$_٢ = ٣٦,٦٧$

(٢) الوسيط بالرسم

الخطوات:

١. نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط.

٢. نرسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط.

٣. نحدد ترتيب الوسيط حيث:

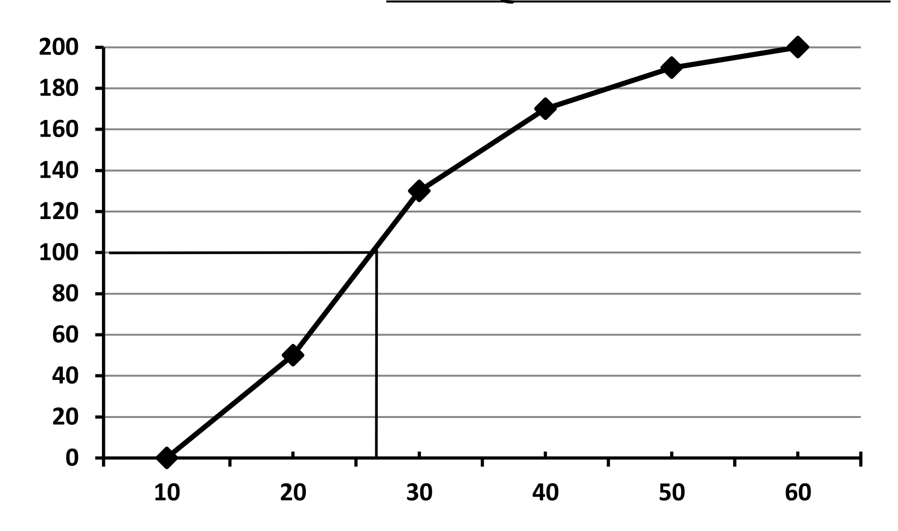
$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـك}}{٢}$$

٤. نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسى (التكرارات المتجمعة) ثم نرسم منه موازياً للمحور الأفقى فيتقاطع مع المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط فى نقطة نسقط منها عموداً على المحور الأفقى فيتحدد قيمة الوسيط.

٥. يمكن رسم المنحنيان المتجمعان الصاعد والهابط معاً فى رسم واحد فيتقاطع المنحنيان فى نقطة واحدة أمام ترتيب الوسيط نسقط منها عموداً على المحور الأفقى فيتحدد قيمة الوسيط.

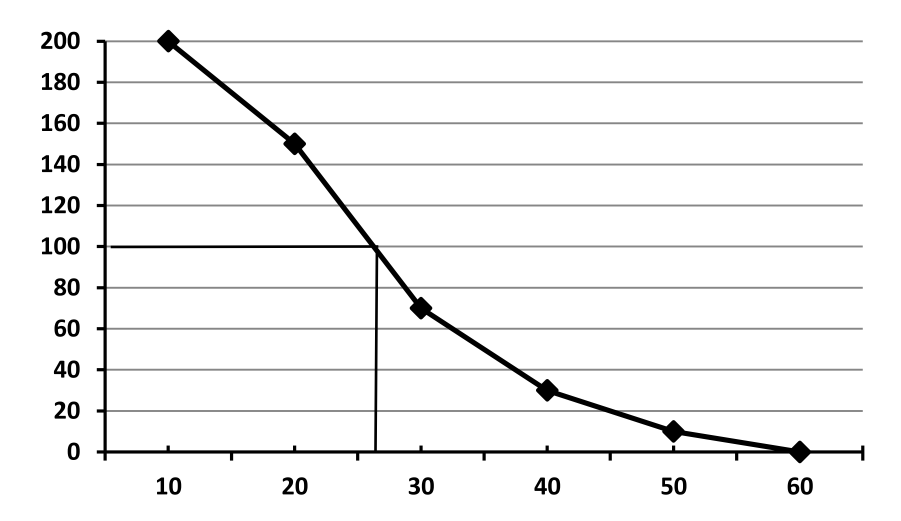
حل مثال (١)

الحل عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد:



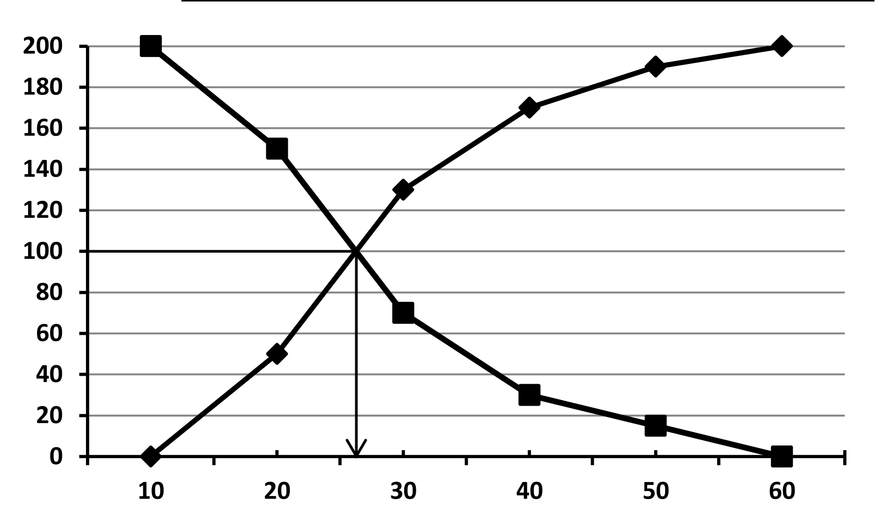
ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢}$ = ١٠٠ ∴ قيمة الوسيط $\text{ر}_{٢}$ = ٢٦ تقريباً

الحل عن طريق المنحنى المتجمع الهابط:



ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢}$ = ١٠٠ ∴ قيمة الوسيط $\text{ر}_{٢}$ = ٢٦ تقريباً

<u>الحل عن طريق المنحنيان المتجمعان الصاعد والهابط معاً:</u>



∴ قيمة الوسيط ر٢ = ٢٦ تقريباً



الفصل الثالث
المنوال
Mode

خصائص المنوال:

١. لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
٢. يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة من أحد طرفيها أو من الطرفين مثل الوسيط ولكن يفضل عدم استخدامه فى هذه الجداول لعدم معرفة طول الفئة المفتوحة وبالتالى نجهل تكرارها المعدل أى نفترض استبعادها مقدماً.
٣. يمكن حسابه بالرسم والحساب مثل الوسيط.
٤. يحتاج لتعديل التكرارات فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية.
٥. يصلح للمتغيرات الوصفية بالإضافة للمتغيرات الكمية.
٦. قد يكون هناك منوالين أو أكثر للتوزيع الواحد وقد لا يوجد منوال على الإطلاق إذا لم يكن هناك قيمة شائعة وبالتالى لا يصلح فى هذه الحالة كمقياس مركزى.
٧. يعطى نتائج غير دقيقة ومتطرفة جداً فى حالة التوزيعات ذات المنحنيات الشديدة أو الحادة الالتواء حيث تصبح قيمة المنوال طرفية ولا تمثل المجموعة.
٨. يعتبر المنوال مقياس غير دقيق وغير ثابت حيث تختلف قيمته بإختلاف طريقة حسابه وطريقة تبويب البيانات من حيث أطوال

الفئات ، وجميع طرق حسابه تقريبية وأدقها طريقة الفروق وبالرسم عن طريق المدرج التكرارى يليهما فى الدقة طريقة الرافعة.

أولاً: البيانات غير المبوبة:

يعرف المنوال بأنه القيمة الشائعة أو القيمة الأكثر شيوعاً أو الأكثر تكراراً أى القيمة التى تحدث أكثر من أى قيمة غيرها فى المجتمع أو العينة.

مثال (١):

استخرج المنوال للقيم التالية:

٣ ، ٥ ، ٧ ، ٥ ، ٨ ، ٩ ، ٣ ، ٥

الحل:

القيمة الأكثر شيوعاً هى الرقم ٥

∴ المنوال (م) = ٥

مثال (٢):

استخرج المنوال للقيم التالية:

١٠ ، ١٢ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٠

الحل:

القيمة الأكثر تكراراً = القيمتان ١٠ ، ١٢

∴ يوجد فى هذه البيانات منوالين هما = ١٠ ، ١٢

مثال (٣):

استخرج المنوال للقيم التالية:

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥

الحل:

لا يوجد قيمة شائعة أو قيمة أكثر تكراراً

∴ لا يوجد منوال

ثانياً: البيانات المبوبة:

حالة الفئات المتساوية:

(١) المنوال بالحساب:

يمكن تعريف المنوال فى جداول التوزيعات التكرارية بأنه نقطة النهاية العظمى للتوزيع.

(أ) طريقة الرافعة أو عزوم القوى: Moments of Force

نحدد بداية الفئة المنوالية وهى الفئة التى يوجد بها أكبر تكرار فى التوزيع ولتحديد قيمة المنوال داخل هذه الفئة يلاحظ ما يلى:

- يقع المنوال فى مركز الفئة المنوالية فى حالة التوزيعات المتماثلة وفى هذه الحالة تتطابق جميع طرق حسابه بالرسم وبالحساب كما يتطابق مع المتوسطات الأخرى الوسط الحسابى والوسيط.
- أما فى حالة التوزيعات غير المتماثلة (الملتوية) يمكن اعتبار المنوال هو محور الارتكاز أو نقطة التوازن لرافعة طولها هو طول الفئة

المنوالية ولها قوتان فى طرفيها هما التكرار السابق عند الحد الأدنى للفئة المنوالية والتكرار اللاحق عند الحد الأعلى للفئة المنوالية ، وبتطبيق قاعدة الروافع التالية:

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

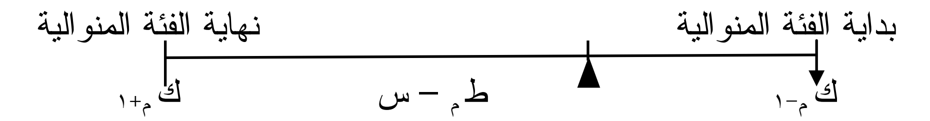
وبفرض أن قيمة المنوال (م) تبعد عن الحد الأدنى للفئة المنوالية بطول مقداره (س) وبالتالى تبعد عن الحد الأعلى للفئة المنوالية بطول مقداره (طول الفئة – س) أى (ط م – س) وذلك بفرض أن طــول الفئة المنوالية = ط م

وإذا رمزنا لتكرار الفئة المنوالية بالرمز ك م

وإذا رمزنا للتكرار السابق بالرمز ك م-١

وإذا رمزنا للتكرار اللاحق بالرمز ك م+١

فإنه يمكن استنتاج العلاقة التالية:



ودائماً سيقترب المنوال من بداية الفئة المنوالية أو من نهايتها حسب التكرار الأكبر السابق أو اللاحق فإذا كان التكرار السابق هو الأكبر تتجه قيمة المنوال أو تقترب من بداية الفئة المنوالية وإذا كان التكرار اللاحق هو الأكبر تتجه قيمة المنوال أو تقترب من نهاية الفئة المنوالية وبديهى إذا تساوى التكراران السابق واللاحق يتمركز المنوال فى منتصف الفئة المنوالية.

بالتعويض فى قاعدة الروافع السابقة نجد أن:

$ك_{م-١} \times س = ك_{م+١} \times (ط_م - س)$

$ك_{م-١} \times س = ك_{م+١} \times ط_م - ك_{م+١} \times س$

$ك_{م-١} \times س + ك_{م+١} \times س = ك_{م+١} \times ط_م$

$س\ (ك_{م-١} + ك_{م+١}) = ك_{م+١} \times ط_م$

$$\therefore س = ط_م \times \frac{ك_{م+١}}{ك_{م+١} + ك_{م-١}}$$

وبإضافة المسافة (س) على بداية الفئة المنوالية نحصل على قيمة المنوال.

$$\therefore \text{المنوال (م) = بداية الفئة المنوالية} + ط_م \times \frac{ك_{م+١}}{ك_{م+١} + ك_{م-١}}$$

<u>ملاحظة هامة:</u>

يلاحظ أن طريقة الرافعة تهمل قيمة أكبر تكرار وتعتمد فى حسابها على قيمة التكرارين السبق واللاحق.

<u>مثال:</u>

استخرج قيمة المنوال من التوزيع التكرارى التالى:

فئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠
تكرارات	١٠	٢٥	٣٥	١٥	٥

الحل:

$$\text{المنوال (م)} = ٣٠ + ١٠ \times \frac{١٥}{١٥+٢٥}$$

$$= ٣٠ + ١٠ \times \frac{١٥}{٤٠}$$

$$\therefore \text{(م)} = ٣٣,٧٥$$

(ب) طريقة الفروق (طريقة بيرسون): Pearson

تعتبر طريقة الفروق أدق طرق حساب المنوال لأنها تأخذ فى الاعتبار عند الحساب أكبر تكرار مع التكرارين السابق واللاحق له ، وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد الفروق أو الانحرافات بين أكبر تكرار والتكرار السابق له مباشرة وبين أكبر تكرار والتكرار اللاحق له مباشرة ، ويقترب المنوال للحد الأدنى للفئة المنوالية أو الحد الأعلى للفئة المنوالية على أساس الفرق الأكبر للتكرار السابق أو اللاحق.

وإذا رمزنا للفروق بالرمز (ف) حيث:

الفرق الأول = أكبر تكرار – التكرار السابق له مباشرةً

$ف_١ = ك_م - ك_{م-١}$

الفرق الثانى = أكبر تكرار – التكرار اللاحق له مباشرةً

$ف_٢ = ك_م - ك_{م+١}$

$$م = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + ط_م \times \frac{ف_١}{ف_١ + ف_٢}$$

حل المثال السابق بطريقة الفروق:

$$ف_١ = ٣٥ - ٢٥ = ١٠$$

$$ف_٢ = ٣٥ - ١٥ = ٢٠$$

$$م = ٣٠ + ١٠ \times \frac{١٠}{١٠+٢٠}$$

$$= ٣٠ + \frac{١٠}{٣}$$

$$\therefore م = ٣٣,٣٣$$

(٢) المنوال بالرسم:

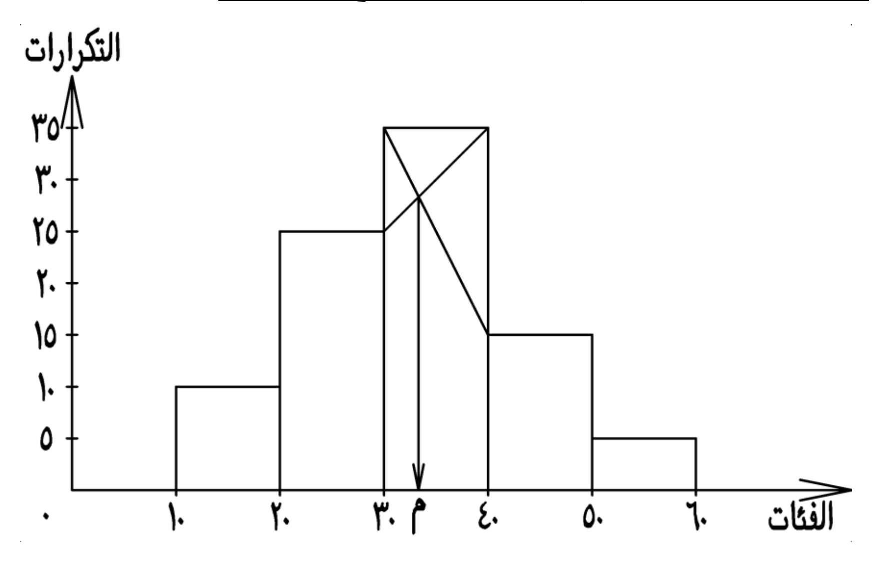
(أ) المنحنى التكرارى:

إذا تم رسم المنحنى التكرارى بدقة تامة يتحدد المنوال أسفل قمة المنحنى (أعلى نقطة فى المنحنى وهى نقطة النهاية العظمى للتوزيع) بحيث إذا أسقطنا منها عموداً على المحور الأفقى يتحدد قيمة المنوال ، ولكن هذه الطريقة تقريبية حيث تتوقف على مهارة الباحث فى رسم المنحنى ، كما لا يمكن استنتاج المنوال من المضلع التكرارى لأن أعلى نقطة ركنية فى المضلع التكرارى تتحدد فوق مركز الفئة المنوالية التى تتضمن أكبر تكرار والمنوال لا يكون فى مركز الفئة المنوالية إلا فى حالة التوزيع المتماثل فقط أو الذى يتساوى فيه التكراران السابق واللاحق لأكبر تكرار فى التوزيع أما فى التوزيعات الأخرى يجب أن يتجه أو يتحرك المنوال داخل الفئة المنوالية تجاه التكرار الأكبر السابق أو اللاحق.

<u>(ب) المدرج التكرارى:</u>

يعتبر من الطرق الدقيقة التى تعطى نتائج متماثلة لطريقة الفروق ، ويمكن أن نكتفى برسم الأعمدة الثلاثة فقط التى تحوى أكبر تكرار والتكراران السابق واللاحق إلا إذا كان المطلوب رسم المدرج التكرارى كاملاً واستنتاج المنوال منه.

<u>حل المثال السابق بالرسم عن طريق المدرج التكرارى:</u>



المنوال = ٣٣,٣ تقريباً

يلاحظ على الرسم السابق أننا قمنا بتوصيل الزاوية اليمنى القائمة لأكبر تكرار بالزاوية اليمنى القائمة للتكرار السابق بخط مستقيم ، كما قمنا بتوصيل الزاوية اليسرى القائمة لأكبر تكرار بالزاوية اليسرى القائمة للتكرار اللاحق بخط مستقيم ، ومن نقطة تقاطع الخطين معاً نسقط عموداً على المحور الأفقى فيتحدد قيم المنوال (م) بالرقم ٣٣,٣ تقريباً.

حالة الفئات غير المتساوية:

القاعدة: نعد أولاً جدول التكرارات المعدلة ثم نقوم بتطبيق نفس القوانين والطرق السابقة لاستنتاج المنوال بالحساب أو الرسم على أساس الفئات الأصلية مع التكرارات المعدلة.

مثال:

استخرج المنوال بالحساب والرسم للتوزيع التالى:

فئات	٥-	١٠-	٢٠-	٢٨-	٣٥-٥٠
تكرارات	٢٥	١٠٠	٦٤	٢٨	٤٥

الحل:

ف	ك	ط	ك ÷ ط
٥-	٢٥	٥	٥ ⟵ $ك_{م-١}$
١٠-	١٠٠	١٠	١٠ ⟵ $ك_{م}$
٢٠-	٦٤	٨	٨ ⟵ $ك_{م+١}$
٢٨-	٢٨	٧	٤
٣٥-٥٠	٤٥	١٥	٣

(١) طريقة الرافعة:

$$م = \text{بداية الفئة المنوالية} + ط_{م} \times \frac{ك_{م+١}}{ك_{م+١} + ك_{م-١}}$$

$$= ١٠ + ١٠ \times \frac{٨}{٨+٥} = ١٦,١٥$$

(٢) طريقة الفروق:

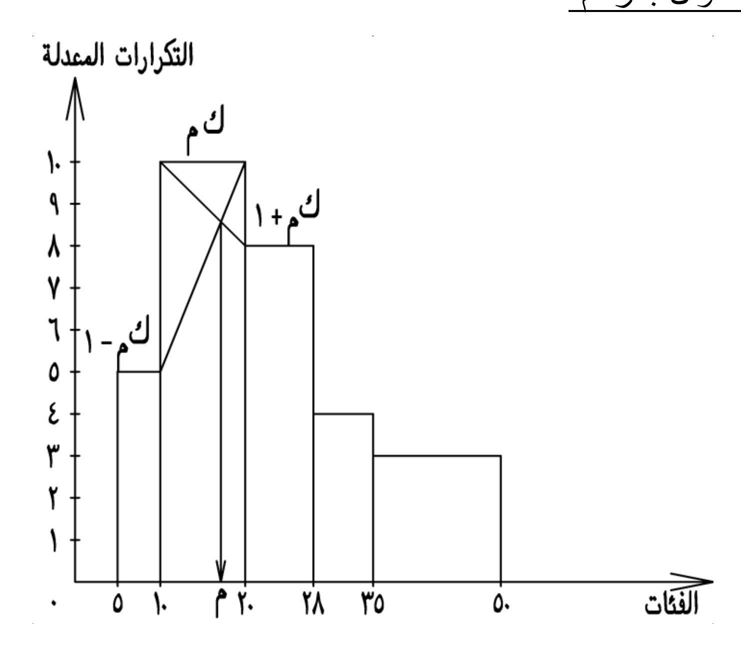
$$م = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + ط_م \times \frac{ف_١}{ف_١ + ف_٢}$$

$$= \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + ط_م \times \frac{\left(ك_م - ك_{م-١}\right)}{\left(ك_م - ك_{م-١}\right) + \left(ك_م - ك_{م+١}\right)}$$

$$= ١٠ + ١٠ \times \frac{\left(١٠-٥\right)}{\left(١٠-٥\right)+\left(١٠-٨\right)} = ١٠ + ١٠ \times \frac{٥}{٥+٢}$$

$$\therefore م = ١٧,١٤$$

(٣) المنوال بالرسم:



ملاحظة:

يمكن الاكتفاء برسم الأعمدة الثلاثة الأولى فقط والتى تحوى أكبر تكرار والتكراران السابق واللاحق.

العلاقة بين المتوسطات الثلاث: (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال)

فى التوزيعات المتماثلة تتساوى المتوسطات الثلاث

الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال

وكلما كان التوزيع ملتوياً كلما اختلفت المتوسطات الثلاث وابتعدت عن بعضها البعض وتزداد الفروق بينها كلما كان المنحنى أكثر إلتواءاً والعكس صحيح.

ودائماً يقترب الوسط الحسابى من ذيل المنحنى لأنه يتأثر كثيراً بالقيم الشاذة والمنوال يقع دائماً أسفل قمة المنحنى وهو أقل من الوسط الحسابى تأثراً بالقيم الشاذة وأكثر من الوسط الحسابى تأثراً بالقيم الشائعة ، أما الوسيط فيقع دائماً بين الوسط الحسابى والمنوال ، وقد وجد بالتجربة أن هناك علاقة تقريبية تجمع المتوسطات الثلاث وخاصةً إذا كان المنحنى قريباً من التماثل وليس شديد الالتواء وللتوزيع منوال واحد فقط وهذه العلاقة هى:

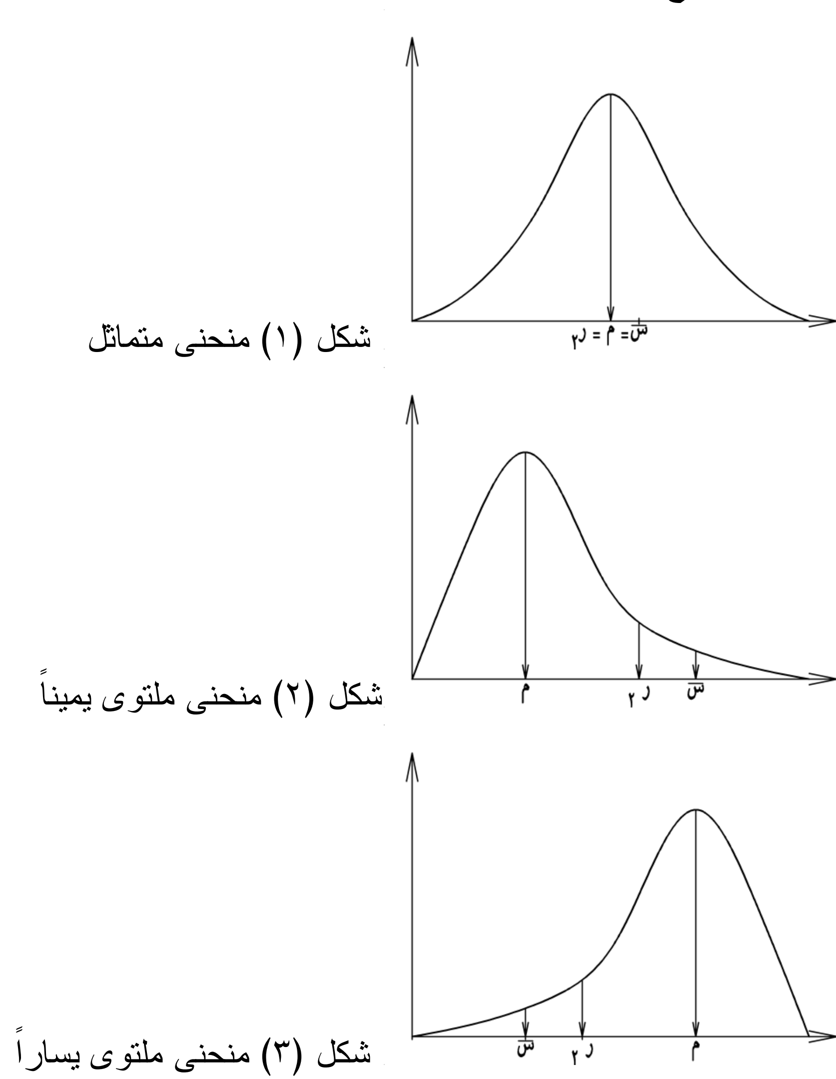
الوسط الحسابى – المنوال = ٣ (الوسط الحسابى – الوسيط)

$\bar{س} - م = ٣(\bar{س} - ر_{٢})$

وتستخدم العلاقة السابقة فى حساب قيم أى متوسط بمعلومية المتوسطان الآخران وخاصةً إذا كان المطلوب الوسط الحسابى من توزيع تكرارى

مفتوح من أحد طرفيه أو من الطرفين ، ويلاحظ أن قيمة الوسيط تقع دائماً بين الوسط الحسابى والمنوال ، كما يستخدم أحد طرفى العلاقة السابقة كمقياس لإلتواء المنحنيات وكلما زادت الفروق بين المتوسطات الثلاث كلما كان التوزيع أكثر إلتواءاً والعكس صحيح.

ويمكن توضيح العلاقات السابقة على الأشكال البيانية التالية:



شكل (١) منحنى متماثل

شكل (٢) منحنى ملتوى يميناً

شكل (٣) منحنى ملتوى يساراً

تمارين على الباب الأول

١. قارن بين المتوسطات: الوسط الحسابى – الوسيط – المنوال للبيانات التالية:

٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠

٢.

الأسعار	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٥٠
الكميات	٣	٥	٨	١٠	٦

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى البسيط للأسعار

ب– الوسط الحسابى للأسعار المرجح بالكميات

٣. لدينا خمسة مجموعات من الطلبة ويبلغ عدد الطلبة فى كل مجموعة على الترتيب:

١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٨ ، ٢٥

فإذا علم أن متوسط طول الطالب فى كل مجموعة من المجموعات السابقة كان على الترتيب:

١٦٢ ، ١٦٧ ، ١٧٥ ، ١٧٨ ، ١٨٥

المطلوب:

الوسط الحسابى للأطوال فى كل المجموعات

.٤

فئات الأجر	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-	١٨٠-٢٠٠
عدد العاملين	١٥	٣٥	٥٥	٤٠	٣٥	٢٠

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى للأجور

ب- الوسيط بالحساب

ج – المنوال بالحساب بطريقتى الرافعة والفروق

.٥

فئات الوزن	٥٠-	٦٠-	٦٥-	٨٠-	٩٠-١١٠
عدد الطلبة	٣٠٠	٣٥٠	٧٥٠	٢٠٠	١٠٠

المطلوب:

أ – حساب متوسط الوزن

ب- حساب وسيط الوزن بالحساب وبالرسم

ج- حساب القيمة الشائعة للوزن بطريقة الرافعة وبالرسم

.٦

فئات الطول	أقل من ١٥٠	١٥٠-	١٥٥-	١٦٥-	١٨٠-	١٩٠-
عدد الطلبة	١٠	١٠٠	٣٠٠	١٥٠	٥٠	٢٠

المطلوب:

أ – حساب وسيط الطول بالحساب والرسم من الجدول المتجمع الهابط

ب- حساب المنوال بطريقة الفروق وبالرسم

ج- استنتاج الوسط الحسابى للطول بمعلومية الوسيط والمنوال

.٧

الفئات	١٧,٥–	٢٢,٥–	٢٧,٥–	٣٢,٥–	٣٧,٥–٤٢,٥
التكرارات	١٢	١٨	٣٠	١٥	٥

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى

ب– ارسم المنحنى المتجمع الصاعد واستنتج منه الوسيط

ج– ارسم المدرج التكرارى واستنتج منه المنوال

.٨

الفئات	صفر–	٦–	١٠–	١٨–	٢٥–	٣٠–٤٠
التكرارات	٦٠	٨٠	٣٢٠	١٠٥	٥٠	٢٠

المطلوب:

أ – ارسم المنحنيين الصاعد والهابط معاً واستنتج منهما قيمة الوسيط

ب ارسم المدرج التكرارى واستنتج المنوال منه

ج– استنتج الوسط الحسابى من المقياسيين السابقين

.٩

الأوزان	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠
الأعداد	١٨	٢٧	٣٣	٦٥	٥٠	١٣	٧

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى

ب– الوسيط بالحساب

ج – المنوال بالحساب

الباب الثانى
مقاييس التشتت
Measures of Dispersion

الفصل الأول: الانحراف المعيارى

الفصل الثاني: نصف المدى الربيعى

الفصل الثالث: معامل الاختلاف

الفصل الأول
الانحراف المعيارى
Standard Deviation

<u>خصائص الانحراف المعيارى:</u>

١. من أدق مقاييس التشتت المطلقة وأكثرها شيوعاً أو استخداماً ولكنه لا يصلح للمقارنات بين تشتت التوزيعات المختلفة إلا إذا كان لها نفس وحدة القياس حيث أن الانحراف المعيارى يأخذ نفس وحدة قياس المتغير الأصلى.

٢. يستخدم جميع مفردات المتغير عند حسابه.

٣. يعالج أهم عيوب الانحراف المتوسط الذى يهمل الاشارات عند إيجاد مجموع الانحرافات المطلقة ولا يمكن حسابه على أساس الانحرافات عن الوسيط أو المنوال.

٤. لا يمكن حسابه من الجداول المفتوحة.

٥. الانحراف المعيارى يحسب على أساس مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابى وهى دائماً أصغر ما يمكن إذا ما قورنت بمجموع مربعات انحرافات القيم عن أى متوسط مركزى آخر.

٦. إذا ربعنا الانحراف المعيارى نحصل على مقياس جديد يطلق عليه التباين Variance ولذلك فالتباين هو مربع الانحراف المعيارى ويكون الانحراف المعيارى هو جذر التباين والتباين له استخدامات هامة ومتعددة خاصة فى علم الإحصاء التحليلى.

٧. يعتبر الانحراف المعيارى أحد العناصر الرئيسية المكونة لمعادلة المنحنى الطبيعى ومعادلات بعض التوزيعات الأخرى غير المتماثلة

وفى حساب الارتباط والانحدار وكثير من موضوعات الإحصاء الوصفى والتحليلى.

٨. لا يتأثر الانحراف المعيارى بالجمع والطرح ولكنه يتأثر بالضرب والقسمة ويجب مراعاة تأثير ذلك على الناتج النهائى.

أولاً: البيانات غير المبوبة:

الانحراف المعيارى هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى لذلك فهو يعالج عيوب الانحراف المتوسط حيث نوجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابى ثم نربع هذه الانحرافات حتى تصبح كلها موجبة ونوجد متوسطها ، وأخيراً نوجد الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابى فينتج الانحراف المعيارى.

وبفرض أننا سنرمز للإنحراف المعيارى بالرمز (ع) إذن يصبح التباين ($ع^٢$) وبالتطبيق الرياضى للتعريف السابق نجد أن:

$$ع^٢ = \frac{مجـ\left(س - \bar{س}\right)^٢}{ن}$$

ويمكن تبسيط للقانون السابق رياضياً كما يلى:

$$ع^٢ = \frac{مجـ\left(س^٢ - ٢س \times \bar{س} + \bar{س}^٢\right)}{ن}$$

$$= \frac{مجـ س^٢}{ن} - \frac{٢\bar{س} \times مجـ س}{ن} + \frac{ن \times \bar{س}^٢}{ن}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - ٢\overline{\text{س}} \times \overline{\text{س}} + \overline{\text{س}}^{٢}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - ٢\,\overline{\text{س}}^{٢} + \overline{\text{س}}^{٢}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - \overline{\text{س}}^{٢}$$

$$\therefore \text{ع}^{٢} = \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}}$$

مثال:

احسب التباين والانحراف المعيارى للقيم التالية:

٤ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٥

الحل:

س	$\text{س}^{٢}$
٤	١٦
٥	٢٥
٨	٦٤
١٠	١٠٠
١٢	١٤٤
١٥	٢٢٥
٥٤ مجـ س	٥٧٤ $\text{مجـ س}^{٢}$

$$\therefore \text{ع}^{2} = \frac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{2}$$

$$= \frac{574}{6} - \left(\frac{54}{6}\right)^{2}$$

$$= 95.67 - 81 = 14.67$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{14.67} = 3.83$$

ولا يتأثر الإنحراف المعيارى عند تبسيط البيانات بطرح أو جمع وسط فرضى حيث أن الطرح والجمع لا يؤثران على الناتج التهائى ولكنه يتأثر بعمليات الضرب والقسمة ولذلك لابد من معالجة نتائجها بالعملية العكسية تماماً.

ثانياً: البيانات المبوبة:

(١) الطريقة المطولة:

يعرف الإنحراف المعيارى فى التوزيعات التكرارية بأنه متوسط مجموع مربعات الإنحرافات أو الفروق عن الوسط الحسابى مرجحاً بالتكرارات حيث:

$$\text{ع}^{2} = \frac{\text{مجـ ك}\left(\text{س} - \bar{\text{س}}\right)^{2}}{\text{مجـ ك}}$$

ويمكن تبسيط العلاقة السابقة بنفس خطوات التبسيط التى أجريناها فى البيانات غير المبوبة بحيث نصل للقانون التالى:

$$\therefore \text{ع}^2 = \frac{\text{مجـ ك س}^2}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^2$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك س}^2}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^2}$$

(٢) الطريقة المختصرة:

إذا قمنا بتبسيط العمليات الحسابية فى التوزيع عن طريق اختيار وسط فرضى مناسب (أ) واستبعاده من جميع مراكز الفئات دون أن تتأثر النتيجة النهائية للانحراف المعيارى نتيجة عمليات الطرح أوالجمع ويمكن استخدام نفس الصيغة الرياضية السابقة باستبدال مراكز الفئات بالانحرافات فقط ويصبح الإنحراف المعيارى هو متوسط مجموع مربعات الفروق بين الانحرافات عن وسط فرضى والوسط الحسابى مرجحاً بالتكرارات كما يلى:

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{مجـ ك} \left(\text{ح} - \overline{\text{س}}\right)^2}{\text{مجـ ك}}$$

وبتبسيط العلاقة السابقة يمكن أن نصل لنفس الصورة كما يلى:

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{مجـ ك ح}^2}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك ح}}{\text{مجـ ك}}\right)^2$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك ح}^2}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك ح}}{\text{مجـ ك}}\right)^2}$$

(٣) الطريقة المختصرة المختزلة:

إذا قسمنا انحرافات الوسط الحسابى عن وسط فرضى على عامل مشترك سواء كان طول الفئة فى الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية أو أى عامل مشترك آخر وليكن (ط) فإن الإنحراف المعيارى يتأثر بالعامل المشترك (عامل الاختزال) ولابد من ضرب الناتج النهائى فى العامل المشترك (ط) كما يلى:

$$ع^{٢} = ط^{٢}\left\{\frac{مجـ ك ح^{\prime ٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح^{\prime}}{مجـ ك}\right)^{٢}\right\}$$

$$\therefore ع = ط\sqrt{\frac{مجـ ك ح^{\prime ٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح^{\prime}}{مجـ ك}\right)^{٢}}$$

مثال:

احسب التباين والإنحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى:

فئات الأجر	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-	١٨٠-	٢٠٠-	٢٢٠-٢٤٠
عدد العاملين	٢٠	٣٠	٥٠	٨٠	٤٠	٢٥	١٥

(١) الطريقة المطولة:

نقوم بإعداد نفس الجدول المعد عند حساب الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بالطريقة المطولة ونضيف عليه خانة إضافية جديدة تنتج من ضرب خانة (ك س) فى خانة (س) لتنتج الخانة (ك $س^{٢}$) كما يلى:

ف	ك	س	ك س	ك $س^2$
١٠٠-	٢٠	١١٠	٢٢٠٠	٢٤٢٠٠٠
١٢٠-	٣٠	١٣٠	٣٩٠٠	٥٠٧٠٠٠
١٤٠-	٥٠	١٥٠	٧٥٠٠	١١٢٥٠٠٠
١٦٠-	٨٠	١٧٠	١٣٦٠٠	٢٣١٢٠٠٠
١٨٠-	٤٠	١٩٠	٧٦٠٠	١٤٤٤٠٠٠
٢٠٠-	٢٥	٢١٠	٥٢٥٠	١١٠٢٥٠٠
٢٢٠-٢٤٠	١٥	٢٣٠	٣٤٥٠	٧٩٣٥٠٠
	٢٦٠ مجـــ ك		٤٣٥٠٠ مجـــ ك س	٧٥٢٦٠٠٠ مجـــ ك $س^2$

$$ع^2 = \frac{\text{مجـــ ك س}^2}{\text{مجـــ ك}} - \left(\frac{\text{مجـــ ك س}}{\text{مجـــ ك}}\right)^2$$

$$= \frac{٧٥٢٦٠٠٠}{٢٦٠} - \left(\frac{٤٣٥٠٠}{٢٦٠}\right)^2$$

$$= ٢٨٩٤٦,١٥ - ٢٧٩٩١,٨٦$$

$$\therefore ع^2 = ٩٥٤,٢٩$$

$$\therefore ع = \sqrt{٩٥٤,٢٩} = ٣٠,٨٩ \text{ جنيه}$$

(٢) الطريقة المختصرة:

نقوم بإعداد نفس الجدول المعد عند حساب الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بالطريقة المختصرة ونضيف عليه خانة إضافية جديدة تنتج من ضرب خانة (ك ح) فى خانة (ح) لتنتج الخانة (ك $ح^2$) كما يلى:

ف	ك	س	ح	ك ح	ك $ح^2$
١٠٠-	٢٠	١١٠	٦٠-	١٢٠٠-	٧٢٠٠٠
١٢٠-	٣٠	١٣٠	٤٠-	١٢٠٠-	٤٨٠٠٠
١٤٠-	٥٠	١٥٠	٢٠-	١٠٠٠-	٢٠٠٠٠
١٦٠-	٨٠	١٧٠	صفر	صفر	صفر
١٨٠-	٤٠	١٩٠	٢٠	٨٠٠	١٦٠٠٠
٢٠٠-	٢٥	٢١٠	٤٠	١٠٠٠	٤٠٠٠٠
٢٢٠-٢٤٠	١٥	٢٣٠	٦٠	٩٠٠	٥٤٠٠٠
	٢٦٠ مجـــ ك			٧٠٠- مجـــ ك ح	٢٥٠٠٠٠ مجـــ ك $ح^2$

حيث أ = ١٧٠

$$ع^2 = \frac{مجـــ ك ح^2}{مجـــ ك} - \left(\frac{مجـــ ك ح}{مجـــ ك}\right)^2$$

$$= \frac{٢٥٠٠٠٠}{٢٦٠} - \left(\frac{-٧٠٠}{٢٦٠}\right)^2$$

$$= ٩٦١,٥٤ - ٧,٢٥$$

$$\therefore ع^2 = ٩٥٤,٢٩$$

$$\therefore ع = \sqrt{٩٥٤,٢٩} = ٣٠,٨٩ \text{ جنيه}$$

يتضح من الحل السابق أن الإنحراف المعيارى لم يتأثر بطرح وسط فرضى (أ) من مراكز الفئات.

(٣) الطريقة المختصرة المختزلة:

نقوم بإعداد نفس الجدول المعد عند حساب الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بالطريقة المختصرة ونضيف عليه خانة إضافية جديدة تنتج من ضرب خانة (ك $\acute{ح}$) فى خانة ($\acute{ح}$) لتنتج الخانة (ك $\acute{ح}^2$) كما يلى:

ف	ك	س	ح	$\acute{ح}$	ك $\acute{ح}$	ك $\acute{ح}^2$
١٠٠-	٢٠	١١٠	٦٠-	٣-	٦٠-	١٨٠
١٢٠-	٣٠	١٣٠	٤٠-	٢-	٦٠-	١٢٠
١٤٠-	٥٠	١٥٠	٢٠-	١-	٥٠-	٥٠
١٦٠-	٨٠	١٧٠	صفر	صفر	صفر	صفر
١٨٠-	٤٠	١٩٠	٢٠	١	٤٠	٤٠
٢٠٠-	٢٥	٢١٠	٤٠	٢	٥٠	١٠٠
٢٢٠-٢٤٠	١٥	٢٣٠	٦٠	٣	٤٥	١٣٥
	٢٦٠ مجـــ ك				٣٥- مجـــ ك $\acute{ح}$	٦٢٥ مجـــ ك $\acute{ح}^2$

حيث أ = ١٧٠ لا يتأثر بها الإنحراف المعيارى

حيث ط = ٢٠ يتأثر بها الإنحراف المعيارى

$$ع^2 = ط^2 \left\{ \frac{مجـــ ك \acute{ح}^2}{مجـــ ك} - \left(\frac{مجـــ ك \acute{ح}}{مجـــ ك} \right)^2 \right\}$$

$$= ٢٠^2 \left\{ \frac{٦٢٥}{٢٦٠} - \left(\frac{٣٥-}{٢٦٠} \right)^2 \right\}$$

$$\therefore ع^2 = ٩٥٤,٤$$

$$\therefore ع = \sqrt{٩٥٤,٤} = ٣٠,٨٩ \text{ جنيه}$$

تصحيح شبرد Sheppard's Correction:

فى البيانات المبوبة فقط فى جداول تكرارية افترضنا أن التكرارات داخل كل فئة موزعة بإنتظام على مدار الفئة ولذلك أعطينا كل تكرار قيمة متوسطة هى مركز الفئة بالرغم من اختلاف ذلك تماماً مع واقع البيانات المفردة الفعلية قبل تبويبها ، ويتوقف هذا التقريب على طول الفئة من ناحية ومدى التوزيع المنتظم للتكرارات داخل الفئة من ناحية أخرى ، ولذلك اقترح "شبرد – Sheppard" معالجة هذا الخطأ الفرضى بأن يتم طرح المقدار $\frac{ط^{٢}}{١٢}$ تحت الجذر التربيعى للإنحراف المعيارى حيث يصبح قانون الإنحراف المعيارى بعد التصحيح كما يلى:

$$ع = \sqrt{\left\{\frac{مجـ ك س^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك س}{مجـ ك}\right)^{٢}\right\} - \frac{ط^{٢}}{١٢}}$$

حيث (ط) هى طول الفئة وبتطبيق هذا التصحيح على المثال السابق نجد أن:

$$ع = \sqrt{٩٥٤,٤ - \frac{٢٠^{٢}}{١٢}}$$

$$= \sqrt{٩٥٤,٤ - ٣٣,٣} = \sqrt{٩٢١,١}$$

$$\therefore ع = ٣٠,٣٥ \text{ جنيه}$$

الفصل الثانى
نصف المدى الربيعى
Semi Interquartile Range

المدى: Range

المدى لمجموعة من القيم أو المشاهدات عبارة عن الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة يمكن أن يأخذها المتغير ، ويعبر المدى عن التشتت المطلق بين القيم أو القراءات ولكنه أقل مقاييس التشتت المطلقة دقة بالرغم من أنه سهل الحساب ولكنه يتأثر بشدة بالقيم الشاذة ، كما لا يأخذ كل القيم فى الاعتبار عند الحساب بل يكتفى بقيمتين فقط أكبر قيمة وأصغر قيمة وبالرغم من العيوب السابقة فهو مؤشر للتشتت خاصة فى المجموعات الكبيرة جداً.

ويمكن حساب التشتت أيضاً من الجداول التكرارية وذلك عن طريق الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى ولذلك لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

كما يستخدم المدى كثيراً فى خرائط مراقبة جودة الإنتاج لكثرة العينات المأخوذة على فترات متقاربة.

مثال ١:

احسب المدى للقيم التالية:

١٢ ، ٢٤ ، ٦٥ ، ٨ ، ٣٦ ، ٤٥

الحل:

المدى = ٦٥ – ٨ = ٧٧

ويمكن التعبير عن المدى بطريقة أخرى وذلك بأن نقول المدى للقيم السابقة يتراوح بين ٨ ، ٦٥

مثال٢:

احسب المدى للتوزيع التكرارى التالى:

ف	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-٤٠
ك	١٠	٣٠	٥٠	٧٠	٤٠	٢٠	١٠

الحل:

المدى = ٤٠ – ٥ = ٣٥

نصف المدى الربيعى: Semi Interquartile Range

خصائص نصف المدى الربيعى:

١. نصف المدى الربيعى أصعب فى طريقة حسابه من المدى ولكنه يعالج بعض عيوب المدى ومن أهمها أنه يهمل القراءات المتطرفة.
٢. لا يأخذ كل المفردات فى الاعتبار عند الحساب ولكنه يعتمد على قراءتين فقط مثل المدى القراءة الأولى وتقع فى نهاية الربع الأول للبيانات والقراءة الثانية التى تقع فى نهاية الربع الثالث للبيانات وذلك بعد ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

وكما رأينا فى الفصل السابق أن الإنحراف المعيارى يعتمد على الإنحرافات أو الفروق عن الوسط الحسابى نجد أن نصف المدى الربيعى يعتمد فى حسابه على الإنحراف بين الربيع الأعلى والوسيط أو الربيع الأدنى والوسيط حيث يفترض أن الوسيط يقع فى منتصف المسافة بين

الربيع الأدنى والربيع الأعلى خاصةً إذا كان التوزيع متماثلاً ، ولذلك فإن نصف المدى الربيعى يعنى منتصف المسافة بين الربيعين الأدنى والأعلى والتى تعادل المسافة بين أحد الربيعين والوسيط والتى يمكن اعتبارها مقياساً مطلقاً للتشتت.

أولاً: البيانات غير المبوبة:

بعد ترتيب القراءات أو القيم ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً يمكن تحديد المفاهيم التالية:

١. الربيع الأول (الأدنى) ر١ (Lower) First Quartile

هو القيمة التى يقع أقل منها أو دونها ربع القيم المختلفة للمتغير وبالتالى يقع أكثر منها ثلاثة أرباع القيم المختلفة للمتغير وذلك من ناحية العدد فقط.

٢. الربيع الثانى (الوسيط) ر٢ Second Quartile

هو القيمة التى يقع أقل منها أو دونها نصف القيم المختلفة للمتغير وبالتالى يقع أكثر منها النصف الآخر لقيم المتغير وذلك من ناحية العدد فقط.

٣. الربيع الثالث (الأعلى) ر٣ (Upper) Third Quartile

هو القيمة التى يقع أقل منها أو دونها ثلاثة أرباع القيم المختلفة للمتغير وبالتالى يقع أكثر منها الربع الآخر لقيم المتغير وذلك من ناحية العدد فقط.

ويتم حساب الربيع الأول والربيع الثالث بنفس طريقة حساب الوسيط الواردة فى الباب الثانى من هذا الكتاب مع اختلاف ترتيب كل ربيع.

خطوات الحساب:

١. ترتيب القراءات أو القيم ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً.
٢. نحدد ترتيب الربيعين كما يلى:
   - ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{ن}{٤}$
   - ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٣ن}{٤}$
٣. نحدد قيمة الربيعين $ر_١$ ، $ر_٣$ بالعد حسب الترتيبين السابقين.
٤. نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$

مثال:

استخرج نصف المدى الربيعى للقيم التالية:

٢٠ ، ١٤ ، ٢٥ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ١٠ ، ٤٠

الحل:

١. ترتيب القراءات تصاعدياً

١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠

٢. ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{ن}{٤}$ = $\frac{١٠}{٤}$ = ٢,٥

أى أن قيمة الربيع الأدنى تقع بين القراءتين الثانية والثالثة

∴ $ر_١ = \frac{١٤+١٨}{٢}$ ١٦ الوسط الحسابى للقراءتين

٣. ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٣ن}{٤} = \frac{٣ \times ١٠}{٤} = ٧,٥$

أى أن قيمة الربيع الأعلى تقع بين القراءتين السابعة والثامنة

$ر_٣ = \frac{٢٨+٣٠}{٢} = ٢٩$ الوسط الحسابى للقراءتين

٤. نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٢٩-١٦}{٢} = ٦,٥$

<u>ثانياً: البيانات المبوبة:</u>

<u>(١) نصف المدى الربيعى بالحساب:</u>

<u>الخطوات:</u>

- نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط
- نحدد ترتيب الربيعين:

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{مجـ ك}{٤}$

ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٣ مجـ ك}{٤}$

- نحدد التكراران المتجمعان اللذان يُحصر بينهما ترتيب الربيعين ، ثم نحدد فئتى الربيعين المقابلة ونوجد قيمة الربيعين داخل الفئتين بالنسبة

والتناسب (على أساس الاستكمال الرياضى الخطى) الذى يفترض أن التكرارات موزعة بإنتظام داخل الفئة ولذلك يمكن استخدام القوانين التالية:

حالة الجدول التكرارى المتجمع الصاعد:

$ر_1$ = الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى + طول فئة الربيع الأدنى × $\frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى – تكرار الحد الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأعلى – تكرار الحد الأدنى}}$

$ر_3$ = الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى + طول فئة الربيع الأعلى × $\frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى – تكرار الحد الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأعلى – تكرار الحد الأدنى}}$

حالة الجدول التكرارى المتجمع الهابط:

$ر_1$ = الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى + طول فئة الربيع الأدنى × $\frac{\text{تكرار الحد الأدنى – ترتيب الربيع الأعلى}}{\text{تكرار الحد الأدنى – تكرار الحد الأعلى}}$

$ر_3$ = الحد الأعلى لفئة الربيع الأعلى + طول فئة الربيع الأعلى × $\frac{\text{تكرار الحد الأدنى – ترتيب الربيع الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأدنى – تكرار الحد الأعلى}}$

ملاحظة هامة:

فى الجدول التكرارى المتجمع الهابط نجد أن ترتيب الربيع الأدنى يعطى قيمة الربيع الأعلى وترتيب الربيع الأعلى يعطى قيمة الربيع الأدنى.

(٢) نصف المدى الربيعى بالرسم:

الخطوات:

- نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط
- نرسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط
- نحدد ترتيب الربيعين:

$$\text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{\text{مجـــك}}{\text{٤}}$$

$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \frac{\text{٣ مجـــك}}{\text{٤}}$$

- نحدد ترتيب الربيعين السابقين على المحور الرأسى (التكرارات المتجمعة) ونرسم منهما خطان موازيان للمحور الأفقى فيتقاطعا مع المنحنى التكرارى المتجمع فى نقطتين نسقط منهما عمودان على المحور الأفقى فيتحدد قيمة الربيعين.

مثال:

استخرج نصف المدى الربيعى بالحساب وبالرسم للتوزيع التالى:

فئات الوزن بالكيلو	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-١١٠
عدد الطلبة	٢٠	٣٥	١٥	٢٠	١٠

الحل:

(١) نصف المدى الربيعى بالحساب:

أ – عن طريق الجدول المتجمع الصاعد:

الفئات	التكرارات	فئات متجمعة صاعدة	تكرارات متجمعة صاعدة
٦٠-	٢٠	أقل من ٦٠	صفر
٧٠-	٣٥	أقل من ٧٠	٢٠
		$ر_1$	← ٢٥
٨٠-	١٥	أقل من ٨٠	٥٥
٩٠-	٢٠	أقل من ٩٠	٧٠
		$ر_3$	← ٧٥
١٠٠-١١٠	١٠	أقل من ١٠٠	٩٠
	١٠٠	١١٠ فأقل	١٠٠

ترتيب الربيع الأدنى $= \frac{مجـ ك}{٤} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$

$ر_1 = ٧٠ + ١٠ \times \frac{٢٥-٢٠}{٥٥-٢٠}$

$\therefore$ $ر_1$ = ٧١,٤٣ كيلو

ترتيب الربيع الأعلى $= \frac{٣ مجـ ك}{٤} = \frac{٣\times١٠٠}{٤} = ٧٥$

$ر_3 = ٩٠ + ١٠ \times \frac{٧٥-٧٠}{٩٠-٧٠}$

$\therefore$ $ر_3$ = ٩٢,٥ كيلو

نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢}$

= $\frac{٩٢,٥-٧١,٤٣}{٢}$ = ١٠,٥ كيلو

<u>ب- عن طريق الجدول المتجمع الهابط:</u>

الفئات	التكرارات	فئات متجمعة هابطة	تكرارات متجمعة هابطة
٦٠-	٢٠	٦٠ فأكثر	١٠٠
٧٠-	٣٥	٧٠ فأكثر	٨٠
		$ر_{١}$ ←	٧٥
٨٠-	١٥	٨٠ فأكثر	٤٥
٩٠-	٢٠	٩٠ فأكثر	٣٠
		$ر_{٣}$ ←	٢٥
١٠٠-١١٠	١٠	١٠٠ فأكثر	١٠
	١٠٠	أكثر من ١١٠	صفر

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{\text{مجـ ك}}{٤}$ = $\frac{١٠٠}{٤}$ = ٢٥

$ر_{٣}$ = ٩٠ + ١٠ × $\frac{٣٠-٢٥}{٣٠-١٠}$

∴ $ر_{٣}$ = ٩٢,٥ كيلو

ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{\text{٣ مجـ ك}}{٤}$ = $\frac{٣\times١٠٠}{٤}$ = ٧٥

$ر_{١}$ = ٧٠ + ١٠ × $\frac{٨٠-٧٥}{٨٠-٤٥}$

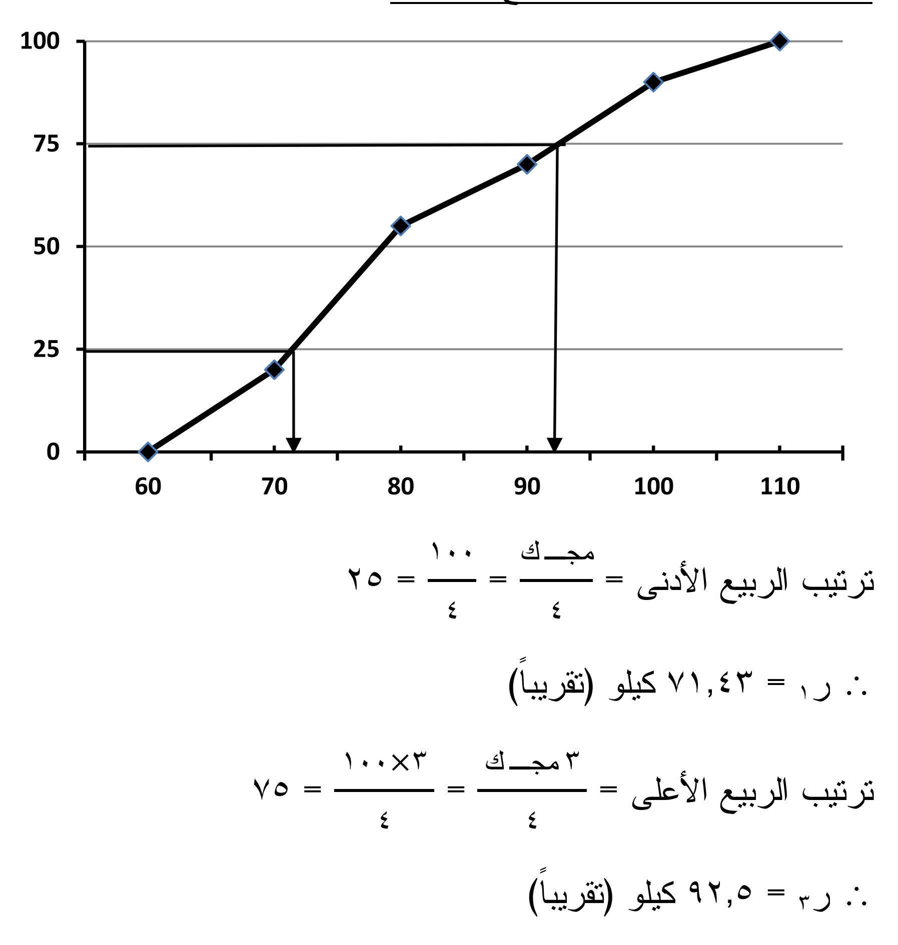
∴ $ر_{١}$ = ٧١,٤٣ كيلو

نصف المدى الربيعى $= \frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$

$= \frac{٩٢,٥ - ٧١,٤٣}{٢} = ١٠,٥$ كيلو

<u>(١) نصف المدى الربيعى بالرسم:</u>

<u>أ – عن طريق الجدول المتجمع الصاعد:</u>



ترتيب الربيع الأدنى $= \frac{مجـــك}{٤} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$

∴ $ر_١$ = ٧١,٤٣ كيلو (تقريباً)

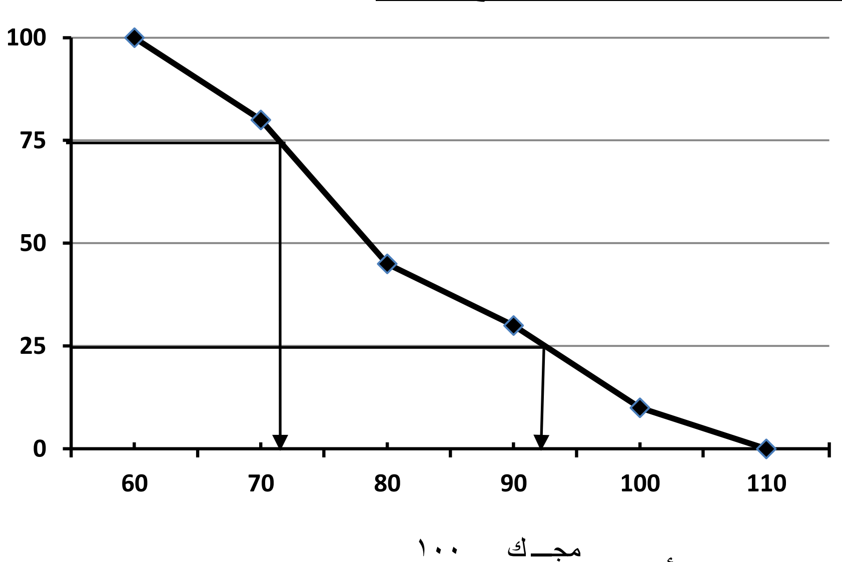
ترتيب الربيع الأعلى $= \frac{٣ مجـــك}{٤} = \frac{٣ \times ١٠٠}{٤} = ٧٥$

∴ $ر_٣$ = ٩٢,٥ كيلو (تقريباً)

نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$

= $\frac{٩٢,٥ - ٧١,٤٣}{٢}$ = ١٠,٥ كيلو

ب – عن طريق الجدول المتجمع الهابط:



ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{مجـــك}{٤}$ = $\frac{١٠٠}{٤}$ = ٢٥

∴ $ر_٣$ = ٩٢,٥ كيلو (تقريباً)

ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٣ مجـــك}{٤}$ = $\frac{٣ \times ١٠٠}{٤}$ = ٧٥

∴ $ر_١$ = ٧١,٤٣ كيلو (تقريباً)

نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$ = $\frac{٩٢,٥ - ٧١,٤٣}{٢}$ = ١٠,٥ كيلو



الفصل الثالث
معامل الاختلاف

Coefficient of Variation

هو مقياس للتشتت النسبى حيث يلغى معامل الاختلاف تأثير وحدات القياس ويحول مقياس التشتت المطلق إلى مقياس تشتت نسبى وبالتالى يصلح هذا المقياس للمقارنة بين تشتت التوزيعات المختلفة خاصة التوزيعات المختلفة فى وحدات القياس والمختلفة فى قيمة الوسط الحسابى.

ويمكن فى هذا الصدد أن نحسب نوعين لمعامل الاختلاف يتوقف كل نوع على مقياس التشتت المستخدم وهما:

(١) معامل الاختلاف المعيارى:

هو الأكثر استخداماً وينتج من قسمة الانحراف المعيارى على الوسط الحسابى للتوزيع ويضرب الناتج فى ١٠٠ لتحويله إلى معامل مئوى ويستخدم عند المقارنة بين تشتت التوزيعات المختلفة ، ويتم حسابه كما يلى:

$$\text{معامل الاختلاف المعيارى} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}} \times ١٠٠$$

$$خ_{ع} = \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

(٢) معامل الاختلاف الربيعى:

يصلح للتطبيق فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة كما يصلح إذا كان المطلوب إيجاد معامل الاختلاف بالرسم ففى هذه الحالات لا نستطيع حساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

وينتج معامل الاختلاف الربيعى من قسمة نصف المدى الربيعى على الوسط الحسابى للربيعين الذى غالباً ما ينتج الوسيط خاصة فى التوزيعات المتماثلة أو القريبة جداً من التماثل ، ثم يضرب الناتج فى ١٠٠ لتحويله إلى معدل مئوى كما يلى:

$$\text{معامل الاختلاف الربيعى} = \frac{\text{نصف المدى الربيعى}}{\text{الوسط الحسابى للربيعين}} \times ١٠٠$$

$$خ_ر = \left(\frac{ر_٣ - ر_١}{٢} \div \frac{ر_٣ + ر_١}{٢} \right) \times ١٠٠$$

$$خ_ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$$

مثال (١):

احسب معامل الاختلاف المعيارى لتوزيع تكرارى حيث انحرافه المعيارى ع = ٣٠,٨٩ ووسطه الحسابى $\overline{س}$ = ١٦٧,٣

الحل:

$$خ_ع = \frac{ع}{\overline{س}} \times ١٠٠ = \frac{٣٠,٨٩}{١٦٧,٣} \times ١٠٠$$

∴ $خ_ع$ = ١٨,٥ ٪ تشتت صغير أو منخفض

ملاحظة:

كلما اقترب معامل الاختلاف من الصفر كلما كان التشتت صغيراً وكلما اقترب من ١٠٠٪ كلما كان التشتت عال جداً وكلما اقترب من ٥٠٪ كلما كان التشتت متوسطاً أو معتدلاً.

مثال (٢):

احسب معامل الاختلاف المعيارى لتوزيع تكرارى حيث قيمة الربيع الأدنى $ر_١$ = ٧١,٤٣ وقيمة الربيع الأعلى $ر_٣$ = ٩٢,٥

الحل:

$$خ_ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٩٢,٥ - ٧١,٤٣}{٩٢,٥ + ٧١,٤٣} \times ١٠٠ = \frac{٢١,٠٧}{١٦٣,٩٣} \times ١٠٠$$

∴ $خ_ر$ = ١٢,٨٥٪ تشتت صغير أو منخفض

مثال (٣):

قارن بين تشتت الأجر فى المصنعين التاليين:

المقاييس / العمال	متوسط الأجور	الانحراف المعيارى
عمال مصنع (أ)	٩٠	٥٥
عمال مصنع (ب)	١٥٠	٧٨

<u>الحل:</u>

$$خ_{ع_١} = \frac{ع_١}{\overline{س}_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥٥}{٩٠} \times ١٠٠$$

$$\therefore خ_{ع_١} = ٦١,١\%$$

$$خ_{ع_٢} = \frac{ع_٢}{\overline{س}_٢} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٧٨}{١٥٠} \times ١٠٠$$

$$\therefore خ_{ع_٢} = ٥٢\%$$

الأجور أكثر تشتتاً فى المصنع (أ) عنها فى المصنع (ب) بالرغم من أن الإنحراف المعيارى فى المصنع (أ) أقل منه فى المصنع (ب) ، إذن لا نستطيع الحكم على التشتت بإستخدام الإنحراف المعيارى بمفرده لأنه مقياس مطلق.

تمارين على الباب الثانى

١. إذا كان لدينا درجات نجاح عدد ١٠ طلبة من طلاب كلية التجارة جامعة القاهرة فى مادة الإحصاء هى:

١٥ ، ١٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٢ ، ١٥

المطلوب:

أ. حساب التباين والإنحراف المعيارى

ب. حساب المدى ونصف المدى الربيعى

٢. إذا كان لدينا درجات عدد ١٠ طلبة من طلاب كلية التجارة جامعة القاهرة فى مادتى الإحصاء والتأمين هى:

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإحصاء	١٢	١٨	١٤	٨	١١	١٦	٦	١٠	١٤	١٧
التأمين	١٣	١٥	١٧	١٠	١٣	١٤	١٠	٥	١١	١٣

المطلوب:

قارن بين تشتت درجات المادتين باستخدام كل من معامل الاختلاف المعيارى ومعامل الاختلاف الربيعى.

٣.

فئات الدخل	أقل من ٥٠	٥٠-	١٠٠-	١٨٠-	٢٥٠-	٣٠٠ فأكثر
عدد العاملين	١٥	٢٥	٣٥	٣٠	١٠	٥

المطلوب:

حساب مقياس تشتت مطلق ونسبى مناسب للتوزيع السابق.

٤.

فئات الوزن	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-	١١٠-١٢٠
عدد الطلبة	٢٠	٤٥	٦٠	٣٠	١٥	١٧	٣

المطلوب:

حساب التباين والإنحراف المعيارى ومعامل الإختلاف المعيارى.

٥.

فئات الأجر	٨٠-	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٢٥٠-	٢٨٠-	٣٥٠-٥٠٠
عمال مصنع (أ)	٢٠	٤٥	٨٥	٦٥	٣٠	٢٠	١٥
عمال مصنع (ب)	٣٠	٣٥	٧٥	٤٥	٣٥	١٥	٥

المطلوب:

قارن بين تشتت الأجر فى المصنعين.

الباب الثالث

الإرتباط والإنحدار

Correlation and Regression

الفصل الأول: الإرتباط الخطى البسيط

الفصل الثاني: الإنحدار الخطى البسيط

مقدمة:

ننتقل من دراسة ظاهرة واحدة أو متغير واحد إلى دراسة ظاهرتين أو متغيرين لتحديد العلاقة أو الإرتباط بينهما وإذا كان هناك علاقة أو ارتباط فما نوعها أوإتجاهها وشدتها ويتم ذلك من خلال دراسة موضوع الإرتباط وإذا كان أحد المتغيرين يؤثر فى المتغير الآخر أو بينهما عامل مشترك يتأثران به معاً ويتم تحديد هذه العلاقة السببية أو الموضوعية بين المتغيرين من خلال دراسة موضوع الإنحدار واستخدام العلاقات الإنحدارية بين المتغيرين فى التنبؤ مستقبلاً بقيمة أحد المتغيرين بدلالة أى قيمة معطاه للمتغير الآخر.

وستركز دراستنا فى هذا الباب على العلاقة الخطية أو المستقيمة بين المتغيرين (س ، ص) من خلال الفصول التالية:

الفصل الأول: الإرتباط الخطى البسيط

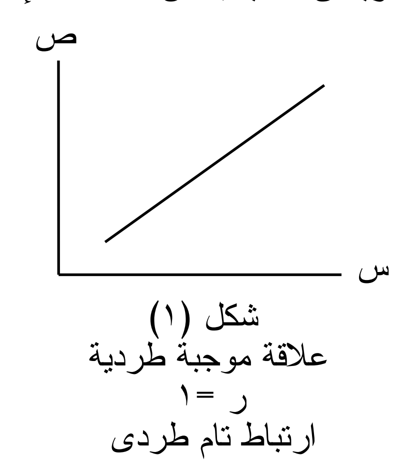
الفصل الثاني: الإنحدار الخطى البسيط

الفصل الأول
الارتباط الخطى البسيط
Simple Linear Correlation

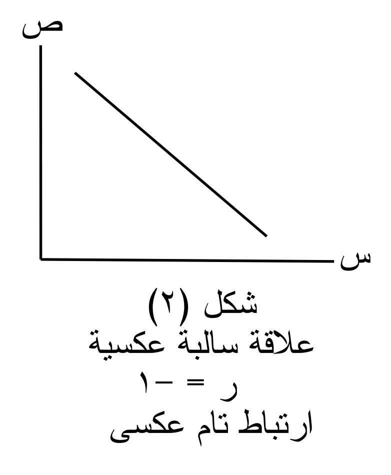
<u>مقدمة:</u>

عند قياس العلاقة أو الإرتباط بين متغيرين مثل العلاقة بين الدخل والإستهلاك فمنطقى أنه كلما زاد الدخل زاد الإستهلاك والعكس صحيح أى أن العلاقة بين الدخل والإستهلاك هى علاقة طردية (فى إتجاه واحد) كما إن العلاقة بين الإستهلاك والإدخار حتماً ستكون علاقة عكسية (فى إتجاهين مختلفين) ، وقد لا يكون هناك أى علاقة أو إرتباط بين المتغيرين مثل العلاقة بين طول شخص ودرجاته فى إمتحان معين ولذلك يكون الإرتباط فى هذه الحالة منعدم ، وقياس الإرتباط بين متغيرين لا يحدد العلاقة السببية بينهما بمعنى تحديد أى المتغيرين متغير مستقل وأيهما متغير تابع ولكن تحدد العلاقة السببية بينهما عن طريق المعادلات الإنحدارية.

ويمكن تحديد بعض الأشكال الإنتشارية للمتغيرين س ، ص فيما يلى:

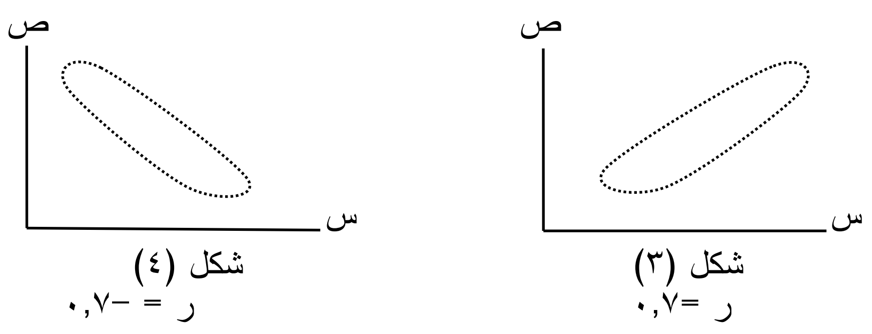


شكل (١)
علاقة موجبة طردية
ر =١
ارتباط تام طردى



شكل (٢)
علاقة سالبة عكسية
ر = -١
ارتباط تام عكسى

ويتضح من الشكلين السابقين أن جميع النقط التى تمثل العلاقة بين المتغيرين س ، ص تقع على خط مستقيم لذلك يعتبر الإرتباط تام بين المتغيرين ، ولكن كلما بعدت النقط عن الخط المستقيم كلما تناقص معامل الإرتباط عن ± ١ ويتضح ذلك من الشكلين التاليين:

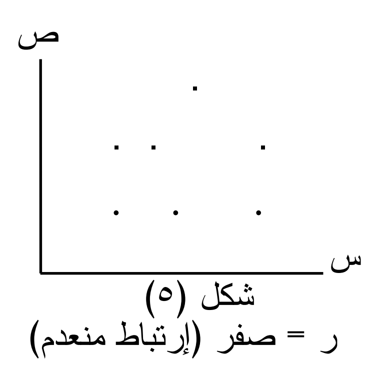


شكل (٣)
ر =٠,٧

شكل (٤)
ر = -٠,٧

وقد تتفق عدة علاقات بين المتغيرين س ، ص فى قيمة معامل الإرتباط ولكن تختلف الخطوط المستقيمة التى تمثل كل علاقة على حدة بمعنى أن معدل التغير فى ص بالنسبة لــ س أو فى س بالنسبة لــ ص يختلف من خط لآخر ، وسوف يتحدد معدل التغير على أساس العلاقة الإنحدارية بين المتغيرين وهو ما سوف ندرسه فى الفصل التالى.

وإذا كانت العلاقة بين س ، ص لا يحددها شكل معين ولا تخضع لقانون أو نظام تنعدم العلاقة أو الإرتباط بين المتغيرين كما يتضح من الشكل الإنتشارى التالى:



شكل (٥)
ر = صفر (إرتباط منعدم)

أيضاً فإن العلاقة بين متغير وثابت تنعدم ، بمعنى أن معامل الإرتباط بين متغير وثابت = صفر.

وإذا استبدلنا س بـــ ص ، أو ص بـــ س فإن قيمة معامل الإرتباط لا تتغير ولذلك لا يمكن عن طريق قياس معامل الإرتباط تحديد العلاقة السببية بين المتغيرين س ، ص بمعنى أننا لا نستطيع أن نحدد أيهما المتغير المستقل وأيهما المتغير التابع ولكن يتم ذلك عن طريق العلاقة الإنحدارية بين المتغيرين.

ويمكننا تحليل نتائج معامل الإرتباط فى الإطار التالى:

١. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = + ١ يطلق على هذه الحالة إرتباط تام طردى.
٢. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = (كسر موجب) يطلق على هذه الحالة علاقة طردية بين المتغيرين س ، ص تزداد كلما إقتربنا من الواحد الصحيح وتقل كلما إقتربنا من الصفر.
٣. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = −١ يطلق على هذه الحالة إرتباط تام عكسى.
٤. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = (كسر سالب) يطلق على هذه الحالة علاقة عكسية بين المتغيرين س ، ص تزداد كلما إقتربنا من (−١) وتقل كلما إقتربنا من الصفر.
٥. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = صفر يطلق على هذه الحالة ارتباط منعدم بمعنى أنه لا توجد أى علاقة أو ارتباط بين المتغيرين س ، ص.

إذن قيمة معامل الإرتباط تتراوح بين −١ ، +١ أى أن −١ $\leq$ ر $\leq$ +١

أولاً: معامل إرتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient

معامل إرتباط بيرسون يعطى نتائج جيدة إذا كانت ن >٣٠ مفردة أما إذا كانت ن أقل من ٣٠ مفردة يعطى معامل إرتباط بيرسون نتائج غير دقيقة ولذلك يفضل استخدام معامل إرتباط آخر يعطى نتائج أكثر دقة فى حالة العينات الصغيرة مثل معامل إرتباط سبيرمان والذى سنتعرض له بالدراسة فيما بعد.

(١) حالة البيانات غير المبوبة:

بفرض أن المتغير س يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، .... $س_{ن}$ بمتوسط حسابى $\bar{س}$ وإنحراف معيارى $ع_{س}$ وبفرض أن المتغير ص يمكن أن يأخذ أحد القيم التالية:

$ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، .... $ص_{ن}$ بمتوسط حسابى $\bar{ص}$ وإنحراف معيارى $ع_{ص}$

وللوصول لمعامل الإرتباط نقوم أولاً بحساب الإنحرافات المطلقة بين القيم الأصلية لكل متغير والوسط الحسابى لنفس المتغير ثم نقوم بتحويل الإنحرافات المطلقة لكل متغير إلى قيم أو وحدات معيارية لإلغاء تأثير إختلاف وحدات القياس بين المتغيرين س ، ص وتتحدد الإنحرافات مقومة بالقيم المعيارية لكل متغير على التوالى كما يلى:

$$\frac{س_{١} - \bar{س}}{ع_{س}} \text{ ، } \frac{س_{٢} - \bar{س}}{ع_{س}} \text{ ، } \frac{س_{٣} - \bar{س}}{ع_{س}} \text{ ، .... ، } \frac{س_{ن} - \bar{س}}{ع_{س}}$$

$$\frac{ص_1 - \bar{ص}}{ع_ص} ، \frac{ص_2 - \bar{ص}}{ع_ص} ، \frac{ص_3 - \bar{ص}}{ع_ص} ، .... ، \frac{ص_ن - \bar{ص}}{ع_ص}$$

ويقاس الإرتباط عن طريق متوسط مجموع حاصل ضرب الإنحرافات مقومة بالقيم المعيارية للمتغيرين س ، ص وإذا رمزنا لمعامل الإرتباط بالرمز (ر) فإن:

$$ر = \frac{1}{ن} \left(\frac{س - \bar{س}}{ع_س}\right) \left(\frac{ص - \bar{ص}}{ع_ص}\right)$$

حيث ن تمثل عدد قيم س ، ص معاً مأخوذ مثنى مثنى

$$ر = \frac{\frac{1}{ن} مجـ (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص})}{\sqrt{ع_س^2 \times ع_ص^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{ن} مجـ (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص})}{\sqrt{\frac{1}{ن} مجـ (س - \bar{س})^2 \times \frac{1}{ن} مجـ (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{مجـ (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص})}{\sqrt{مجـ (س - \bar{س})^2 \times مجـ (ص - \bar{ص})^2}}$$

وبتبسيط العلاقات السابقة يمكن استخدام أحد المعادلات التالية لحساب معامل الإرتباط:

$$ر = \frac{مجـ\ س\ ص - ن\ \bar{س}\ \bar{ص}}{\sqrt{\left(مجـ\ س^{2} - ن\ \bar{س}^{2}\right) \times \left(مجـ\ ص^{2} - ن\ \bar{ص}^{2}\right)}}$$

$$ر = \frac{ن \times مجـ\ س\ ص - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{\sqrt{\left\{ن\ مجـ\ س^{2} - (مجـ\ س)^{2}\right\}\left\{ن\ مجـ\ ص^{2} - (مجـ\ ص)^{2}\right\}}}$$

ويلاحظ على القوانين السابقة أن الجذر التربيعى فى المقام دائماً كمية موجبة أكبر من الصفر أما البسط إذا كان التغير فى قيم س فى نفس إتجاه التغير فى قيم ص كانت إشارة الإنحرافات أو القيم المعيارية للمتغيرين س ، ص موجبة وبالتالى يكون معامل الإرتباط موجب (طردى) ، أما إذا كان التغير فى قيم س عكس التغير فى قيم ص (فى إتجاهين متضادين) كانت إشارة الإنحرافات أو القيم المعيارية مختلفة وبالتالى يكون حاصل ضربهما كمية سالبة ويكون معامل الإرتباط سالب (عكسى).

التغاير Co-Variance

يطلق على بسط معامل الإرتباط اصطلاح التغاير ، أى أن التغاير:

$$غ = \frac{1}{ن}\ مجـ\ (س - \bar{س})\ (ص - \bar{ص})$$

والتغاير هو الذى يحدد نوع العلاقة بين المتغيرين س ، ص طردية أم عكسية وذلك حسب إشارة البسط (التغاير).

<u>خصائص التغاير:</u>

١. لا يتأثر بالجمع والطرح بمعنى أنه إذا طرحنا أو جمعنا مقدار ثابت لقيم كل متغير على حدة فإن ناتج التغاير لا يختلف.
٢. يتأثر التغاير بالضرب والقسمة ، ولذلك إذا ضربنا أو قسمنا قيم المتغيرين فى أو على مقادير ثابتة لابد من معالجة النتيجة بالعملية العكسية تماماً حتى لا يختلف التغاير.

ملحوظة: تغاير س ، س (متغيران متساويان) هو تباين س

من الخصائص السابقة يتضح أن خصائص التغاير هى نفس خصائص التباين ، ولكن معامل الإرتباط لا يتأثر بالجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة ، وعلى ذلك إذا بسطنا قيم س ، ص بوسط فرضى والقسمة على عامل اختزال معين لا يتم معالجة الناتج بهذه القيم ولذلك يمكن الاستعانة بالطرق المختصرة والمختزلة فى تبسيط أرقام المتغيرين س ، ص فى قوانين معامل الإرتباط كما يلى:

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{ص}} - \text{ن}\ \bar{\text{ح}}_{\text{س}}\ \bar{\text{ح}}_{\text{ص}}}{\sqrt{\left(\text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{س}}^{2} - \text{ن}\ \bar{\text{ح}}_{\text{س}}^{2}\right) \times \left(\text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{ص}}^{2} - \text{ن}\ \bar{\text{ح}}_{\text{ص}}^{2}\right)}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{ص}} - \text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{س}} \times \text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{ص}}}{\sqrt{\left\{\text{ن}\ \text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{س}}^{2} - \left(\text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{س}}\right)^{2}\right\}\left\{\text{ن}\ \text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{ص}}^{2} - \left(\text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{ص}}\right)^{2}\right\}}}$$

مثال:

حدد نوع العلاقة أو الإرتباط بين الطول والوزن من البيانات التالية:

الطول (س) ١٦٠ ١٦٥ ١٥٨ ١٦٥ ١٧٠ ١٧٥ ١٦٥ ١٧٣ ١٨٠ ١٧٨

الوزن (ص) ٦٥ ٦٨ ٦٠ ٧٠ ٧٥ ٧٠ ٦٥ ٦٩ ٧٠ ٧٦

الحل:

الطريقة المطولة:

س	ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$	س ص
١٦٠	٦٥	٢٥٦٠٠	٤٢٢٥	١٠٤٠٠
١٦٥	٦٨	٢٧٢٢٥	٤٦٢٤	١١٢٢٠
١٥٨	٦٠	٢٤٩٦٤	٣٦٠٠	٩٤٨٠
١٦٥	٧٠	٢٧٢٢٥	٤٩٠٠	١١٥٥٠
١٧٠	٧٥	٢٨٩٠٠	٥٦٢٥	١٢٧٥٠
١٧٥	٧٠	٣٠٦٢٥	٤٩٠٠	١٢٢٥٠
١٦٥	٦٥	٢٧٢٢٥	٤٢٢٥	١٠٧٢٥
١٧٣	٦٩	٢٩٩٢٩	٤٧٦١	١١٩٣٧
١٨٠	٧٠	٣٢٤٠٠	٤٩٠٠	١٢٦٠٠
١٧٨	٧٦	٣١٦٨٤	٥٧٧٦	١٣٥٢٨
١٦٨٩ مجــ س	٦٨٨ مجــ ص	٢٨٥٧٧٧ مجــ س	٤٧٥٣٦ مجــ $ص^{٢}$	١١٦٤٤٠ مجــ س ص

$$ر = \frac{\text{مجــ س ص} - ن\,\bar{س}\,\bar{ص}}{\sqrt{\left(\text{مجــ }س^{٢} - ن\,\bar{س}^{٢}\right) \times \left(\text{مجــ }ص^{٢} - ن\,\bar{ص}^{٢}\right)}}$$

حيث $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{١٦٨٩}{١٠} = ١٦٨,٩$

حيث $\bar{ص} = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{٦٨٨}{١٠} = ٦٨,٨$

$$ر = \frac{١١٦٤٤٠ - ١٠ \times ١٦٨,٩ \times ٦٨,٨}{\sqrt{(٢٨٥٧٧٧ - ١٠ \times ١٦٨,٩ \times ١٦٨,٩) \times (٤٧٥٣٦ - ١٠ \times ٦٨,٨ \times ٦٨,٨)}}$$

$$ر = \frac{١١٦٤٤٠ - ١١٦٢٠٣,٢}{\sqrt{(٢٨٥٧٧٧ - ٢٨٥٢٧٢,١) \times (٤٧٥٣٦ - ٤٧٣٣٤,٤)}}$$

$$ر = \frac{٢٣٦,٨}{\sqrt{٥٠٤,٩ \times ٢٠١,٦}}$$

∴ ر = + ٠,٧٤ ارتباط طردى قوى بين الطول والوزن

الطريقة المختصرة:

بأخذ وسط فرضى لــ س = ١٦٥ ووسط فرضى لــ ص = ٧٠

س	ص	ح س	ح ص	$ح_س^٢$	$ح_ص^٢$	ح س ح ص
١٦٠	٦٥	‎-٥	‎-٥	٢٥	٢٥	٢٥
١٦٥	٦٨	صفر	‎-٢	صفر	٤	صفر
١٥٨	٦٠	‎-٧	‎-١٠	٤٩	١٠٠	٧٠
١٦٥	٧٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
١٧٠	٧٥	٥	٥	٢٥	٢٥	٢٥
١٧٥	٧٠	١٠	صفر	١٠٠	صفر	صفر
١٦٥	٦٥	صفر	‎-٥	صفر	٢٥	صفر
١٧٣	٦٩	٨	‎-١	٦٤	١	‎-٨
١٨٠	٧٠	١٥	صفر	٢٢٥	صفر	صفر
١٧٨	٧٦	١٣	٦	١٦٩	٣٦	٧٨
		٣٩ مج ح س	‎-١٢ مج ح ص	٦٥٧ مج $ح_س^٢$	٢١٦ مج $ح_ص^٢$	١٩٠ مج ح س ح ص

وباستخدام الصيغة المختصرة الثانية:

$$ر = \frac{ن \times مجــ ح_س ح_ص - مجــ ح_س \times مجــ ح_ص}{\sqrt{\left\{ن\, مجــ ح_س^٢ - \left(مجــ ح_س\right)^٢\right\}\left\{ن\, مجــ ح_ص^٢ - \left(مجــ ح_ص\right)^٢\right\}}}$$

$$ر = \frac{١٠ \times ١٩٠ - ٣٩ \times -١٢}{\sqrt{\{١٠ \times ٦٥٧ - (٣٩)(٣٩)\}\{١٠ \times ٢١٦ - (-١٢)(-١٢)\}}}$$

$$ر = \frac{١٩٠٠ + ٤٦٨}{\sqrt{\{٦٥٧١٠ - ١٥٢١\}\{٢١٦٠ - ١٤٤\}}}$$

∴ ر = + ٠,٧٤ ارتباط طردى قوى بين الطول والوزن (نفس الناتج السابق)

(٢) حالة البيانات المبوبة:

فى حالة البيانات المبوبة لمتغيرين س ، ص يتم تفريغها ثم عرضها فى شكل جدول مزدوج ، وفى الجدول المزدوج لا يمكن عرض أو رسم الشكل الانتشارى للبيانات ، ولكن يلاحظ بصفة عامة أنه كلما كانت الأرقام متجمعة حول القطر الرئيسى (الواصل من أعلى اليمين إلى أسفل اليسار) كلما كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص علاقة خطية أو قريبة من الخطية وأيضاً علاقة طردية وعلى العكس كلما كانت الأرقام متجمعة حول القطر الآخر العكسى (الواصل من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين) كلما كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص علاقة خطية أو قريبة من الخطية وهى علاقة عكسية بين المتغيرين.

ويشترط لحساب معامل ارتباط بيرسون من الجداول المزدوجة أن تكون فئات س وفئات ص مقفلة مثل الوسط الحسابى والتباين ولذلك لا يصلح قياس معامل ارتباط بيرسون فى حالة الجداول المفتوحة.

وبنفس العرض السابق يمكن الوصول لقوانين معامل ارتباط بيرسون فى التوزيعات التكرارية المزدوجة كما يلى:

<u>الطريقة المطولة:</u>

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك } \bar{\text{س}}\ \bar{\text{ص}}}{\sqrt{\left(\text{مجـ ك س}^{2} - \text{مجـ ك } \bar{\text{س}}^{2}\right) \times \left(\text{مجـ ك ص}^{2} - \text{مجـ ك } \bar{\text{ص}}^{2}\right)}}$$

حيث $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$ ، $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ك ص}}{\text{مجـ ك}}$

صورة أخرى:

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك س} \times \text{مجـ ك ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س}^{2} - \left(\text{مجـ ك س}\right)^{2}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ص}^{2} - \left(\text{مجـ ك ص}\right)^{2}\right\}}}$$

<u>الطريقة المختصرة:</u>

<u>هذه الطريقة تستخدم إذا كانت الفئات متساوية</u>

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك } \text{ح}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{ص}} - \text{مجـ ك } \bar{\text{ح}}_{\text{س}}\ \bar{\text{ح}}_{\text{ص}}}{\sqrt{\left(\text{مجـ ك}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{س}}^{2} - \text{مجـ ك } \bar{\text{ح}}_{\text{س}}^{2}\right) \times \left(\text{مجـ ك}_{\text{ص}}\ \text{ح}_{\text{ص}}^{2} - \text{مجـ ك } \bar{\text{ح}}_{\text{ص}}^{2}\right)}}$$

حيث $\bar{\text{ح}}_{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}}$ ، $\bar{\text{ح}}_{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ك}_{\text{ص}}\ \text{ح}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك}}$

صورة أخرى:

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ح}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{ص}} - \text{مجـ ك}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{س}} \times \text{مجـ ك}_{\text{ص}}\ \text{ح}_{\text{ص}}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{س}}^{2} - \left(\text{مجـ ك}_{\text{س}}\ \text{ح}_{\text{س}}\right)^{2}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{\text{ص}}\ \text{ح}_{\text{ص}}^{2} - \left(\text{مجـ ك}_{\text{ص}}\ \text{ح}_{\text{ص}}\right)^{2}\right\}}}$$

مثال (١):

فيما يلى عينة من ٥٠ عامل موزعين حسب ساعات العمل اليومى وعدد الوحدات المنتجة يومياً فى أحد المصانع:

عدد الساعات / عدد الوحدات	٨-	١٠-	١٢-١٤	المجموع
٢٥-	٦	٩	-	١٥
٣٠-	-	١١	٨	١٩
٣٥-٤٠	-	٦	١٠	١٦
المجموع	٦	٢٦	١٨	٥٠

المطلوب: حساب معامل ارتباط بيرسون بين عدد ساعات العمل اليومى وعدد الوحدات المنتجة يومياً.

الحل:

الطريقة المطولة:

ص \ س	٨-	١٠-	١٢-١٤	ك ص	ص (١)	ك ص (٢)	ك ص٢ (٣)	ك س (٤)	ك س ص (٥)
٢٥-	٥٤ / ٦ / ١٦٥	٩٩ / ٩ / ٢٤٧,٥	-	١٥	٢٧,٥	٤١٢,٥	١١٣٤٣,٧٥	١٥٣	٤٢٠٧,٥
٣٠-	-	١٣١ / ١١ / ٣٥٧,٥	١٠٤ / ٨ / ٢٦٠	١٩	٣٢,٥	٦١٧,٥	٢٠٠٦٨,٧٥	٢٢٥	٧٣١٢,٥
٣٥-٤٠	-	٦٦ / ٦ / ٢٢٥	١٣٠ / ١٠ / ٣٧٥	١٦	٣٧,٥	٤١٢,٥	٢٢٥٠٠	١٩٦	٧٣٥٠
ك س	٦	٣٦	١٨	٥٠		١٦٣٠	٥٣٩١٢,٥	٥٧٤	١٨٨٧٠

		٨-	١٠-	١٢-١٤	
(١)	س	٩	١١	١٣	
(٢)	ك س	٥٤	٢٨٦	٢٣٤	٥٧٤
(٣)	ك س٢	٤٨٦	٣١٤٦	٣٠٤٢	٦٦٧٤
(٤)	ك ص	١٦٥	٨٣٠	٦٣٥	١٦٣٠
(٥)	ك س ص	١٤٨٥	٩١٣٠	٨٢٥٥	١٨٨٧٠

ملاحظات على الجدول السابق:

١. الخانة الأولى هى مراكز الفئات للمتغيرين س ، ص
٢. الخانة الثانية عبارة عن حاصل ضرب التكرارات فى مراكز الفئات
٣. الخانة الثالثة عبارة عن حاصل ضرب الخانتين الأولى والثانية
٤. الخانة الرابعة: يتم ضرب كل تكرار مرة فى مراكز فئات س المشتركة مع التكرار فى العمود وتسجيل الناتج فى الزاوية العليا

ومرة فى مراكز فئات ص المشتركة مع التكرار فى الصف وتسجيل الناتج فى الزاوية السفلى ، ثم تجمع الأرقام فى كل صف فى الزاوية العليا تنتج الخانة الرابعة ك س وبجمع الأرقام داخل الزوايا السفلى فى كل عمود تنتج الخانة الرابعة ك ص

٥. الخانة الخامسة تنتج من ضرب الخانة الأولى فى الخانة الرابعة

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك س} \times \text{مجـ ك ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س}^{٢} - \left(\text{مجـ ك س}\right)^{٢}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ص}^{٢} - \left(\text{مجـ ك ص}\right)^{٢}\right\}}}$$

$$\text{ر} = \frac{٥٠ \times ١٨٨٧٠ - ٥٧٤ \times ١٦٣٠}{\sqrt{\left\{٥٠ \times ٦٦٧٤ - \left(٥٧٤\right)^{٢}\right\}\left\{٥٠ \times ٥٣٩١٢,٥ - \left(١٦٣٠\right)^{٢}\right\}}}$$

$$\text{ر} = \frac{٩٤٣٥٠٠ - ٩٣٥٦٢٠}{\sqrt{\left\{٣٣٣٧٠٠ - ٣٢٩٤٧٦\right\}\left\{٢٦٩٥٦٢٥ - ٢٦٥٦٩٠٠\right\}}}$$

$$\text{ر} = \frac{٧٨٨٠}{\sqrt{٤٢٢٤ \times ٣٨٧٢٥}}$$

∴ ر = + ٠,٦١٦ ارتباط طردى فوق المتوسط بين ساعات العمل وعدد الوحدات المنتجة يومياً.

<u>حل آخر:</u>

<u>الطريقة المختصرة المختزلة:</u>

تصلح إذا كانت الفئات متساوية

ص \ س	٨-	١٠-	١٢-١٤	ك ص	ص (١)	ح ص (٢)	ح' ص (٣)	ك ص ح' ص (٤)	ك ص ح'² ص (٥)	ك ح' س ح' ص (٦)
٢٥-	٦ / ٦	٠ / ٩	٠ / -	١٥	٢٧,٥	٥-	١-	١٥-	١٥	٦
٣٠-	٠ / -	٠ / ١١	٠ / ٨	١٩	٣٢,٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٣٥-٤٠	٠ / -	٠ / ٦	١٠ / ١٠	١٦	٣٧,٥	٥	١	١٦	١٦	١٠
ك س	٦	٣٦	١٨	٥٠				١	٣١	١٦
(١) س	٩	١١	١٣							
(٢) ح س	٢-	صفر	٢							
(٣) ح' س	١-	صفر	١							
(٤) ك س ح' س	٦-	صفر	١٨	١٢						
(٥) ك س ح'² س	٦	صفر		٢٤						
(٦) ك ح' س ح' ص	٦	صفر		١٦						

يلاحظ على الجدول السابق ما يلى:

١. الخانة الأولى: هى مراكز فئات س ، ومراكز فئات ص
٢. الخانة الثانية: الانحرافات بين مراكز الفئات والوسط الفرضى وقد أخذنا وسط فرضى لـــ س = ١١ ووسط فرضى لـــ ص = ٣٢,٥
٣. الخانة الثالثة: الانحرافات المختزلة وتم الحصول عليها بقسم الخانة الثانية وهى الانحرافات بين مراكز الفئات والوسط الفرضى على طول الفئة أى على رقم ٢ بالنسبة لـــ س والرقم ٥ بالنسبة لـــ ص
٤. الخانة الرابعة: تم الحصول عليها بضرب التكرارات فى الخانة رقم (٣) أى بضرب ك × ح'

٥. الخانة الخامسة: تم الحصول عليها بضرب الخانة رقم (٣) × الخانة رقم (٤)

٦. الخانة السادسة: تم الحصول عليها بضرب تكرار كل خلية (أو مربع) مرة فى انحرافات س المشتركة مع التكرار فى العمود ومرة فى انحرافات ص المشتركة مع التكرار فى الصف

ويسجل ناتج الضرب فى الزاوية العليا داخل كل مربع أى تم ضرب ك × حَس × حَص

وعلى سبيل المثال المربع الأول (الخلية الأولى) وبه تكرار قيمته ٦ يتم ضرب هذا التكرار : ٦ × −١ ×−١ = ٦ وتسجل فى الهامش العلوى للمربع الأول (الزاوية العليا)

ملاحظات هامة:

١. العمود الكامل فوق انحراف س = صفر وكل خلاياه = صفر والصف الكامل على يمين انحراف ص = صفر وكل خلاياه = صفر

٢. يمكن الاستغناء عن الخانتين الأولى والثانية إذا كانت الجداول المزدوجة ذات فئات متساوية بحيث نبدأ مباشرة بالخانة الثالثة حَ ويمكن كتابتها مختصرة ح فقط بحيث يتم وضع صفر أمام أى فئة وعلى يمين الصفر أو أعلاه تسجل الأعداد الطبيعية السالبة −١ ، −٢ ، −٣ ، ... وهكذا وعلى يسار الصفر أو أسفله تسجل الأعداد الطبيعية الموجبة +١ ، +٢ ، +٣ ، ... وهكذا

$$ر = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك} ح'_{س} ح'_{ص} - \text{مجـ ك} ح'_{س} \times \text{مجـ ك} ح'_{ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك} ح'^{2}_{س} - \left(\text{مجـ ك} ح'_{س}\right)^{2}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك} ح'^{2}_{ص} - \left(\text{مجـ ك} ح'_{ص}\right)^{2}\right\}}}$$

$$ر = \frac{٥٠ \times ١٦ - ١٢ \times ١}{\sqrt{\left\{٥٠ \times ٢٤ - (١٢)^{٢}\right\}\left\{٥٠ \times ٣١ - (١)^{٢}\right\}}}$$

$$ر = \frac{٧٨٨}{\sqrt{١٠٥٦ \times ١٥٤٩}}$$

$ر = \frac{٧٨٨}{١٢٧٨,٩٦٢} = + ٠,٦١٦$ ارتباط طردى فوق المتوسط (يتفق تماماً مع الناتج الذى توصلنا له بالطريقة المطولة).

<u>مثال (٢):</u>

احسب معامل ارتباط بيرسون للتوزيع التكرارى المزدوج التالى:

ص \ س	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-١٨٠	ك ص
٥٠-	-	-	١٠	١٥	٢٥
٦٠-	-	٢٠	٢٥	١٠	٥٥
٧٠-	-	١٠	١٧	-	٢٧
٨٠-	٨	١٢	٨	-	٢٨
٩٠-١٠٠	٤	١١	-	-	١٥
ك س	١٢	٥٣	٦٠	٢٥	١٥٠

<u>الحل:</u>

الطريقة المختصرة المختزلة:

ص \ س	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-١٨٠	ك ص	ح ص	ك ص ح ص	ك ص ح²ص	ك ح س ح ص
٥٠-	٠ / -	٠ / -	٠ / ١٠	٣٠- / ١٥	٢٥	٢-	٥٠-	١٠٠	٣٠-
٦٠-	٠ / -	٢٠ / ٢٠	٠ / ٢٥	١٠- / ١٠	٥٥	١-	٥٥-	٥٥	١٠
٧٠-	٠ / -	٠ / ١٠	٠ / ١٧	٠ / -	٢٧	صفر	صفر	صفر	صفر
٨٠-	١٦- / ٨	١٢- / ١٢	٠ / ٨	٠ / -	٢٨	١	٢٨	٢٨	٢٨-
٩٠ - ١٠٠	١٦- / ٤	٢٢- / ١١	٠ / -	٠ / -	١٥	٢	٣٠	٦٠	٣٨-
ك س	١٢	٥٣	٦٠	٢٥	١٥٠		٤٧-	٢٤٣	٨٦-
ح س	٢-	١-	صفر	١					
ك س ح س	٢٤-	٥٣-	صفر	٢٥	٥٢-				
ك س ح²س	٤٨	٥٣	صفر	٢٥	١٣٦				
ك ح س ح ص	٣٢-	١٤-	صفر	٤٠-	٨٦-				

$$ر = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{س}\text{ح}_{ص} - \text{مجـ ك ح}_{س} \times \text{مجـ ك ح}_{ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{س}^{٢} - \left(\text{مجـ ك ح}_{س}\right)^{٢}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{ص}^{٢} - \left(\text{مجـ ك ح}_{ص}\right)^{٢}\right\}}}$$

$$ر = \frac{١٥٠ \times -٨٦ - \left(-٥٢ \times -٤٧\right)}{\sqrt{\left\{١٥٠ \times ١٢٦ - \left(-٥٢\right)^{٢}\right\}\left\{١٥٠ \times ٢٤٣ - \left(-٤٧\right)^{٢}\right\}}}$$

$$= \frac{-١٢٩٠٠ - ٢٤٤٤}{\sqrt{\{١٨٩٠٠ - ٢٧٠٤\}\{٣٦٤٥٠ - ٢٢٠٩\}}}$$

$$= \frac{-١٥٣٤٤}{\sqrt{١٦١٩٦ \times ٣٤٢٤١}} = \frac{-١٥٣٤٤}{٢٣٥٤٩,٢٤٩} = -٠,٦٥$$ ارتباط عكسى فوق المتوسط

ثانياً:معامل إرتباط سبيرمان Spearman Correlation Coefficient

يصلح لقياس العلاقة أو الارتباط بين المتغيرات الكمية والمتغيرات النوعية أو الوصفية وذلك إذا أمكن ترتيب الأنواع أو الصفات ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً ، وفى حالة تشابه بعض القيم أو الصفات فتأخذ القيم المتساوية أو المتشابهة رتباً واحدة متوسطة عبارة عن متوسط الرتب لهذه القيم أو الصفات المتشابهة كما لو أنها غير متساوية أو غير متشابهة.

ويعطى معامل ارتباط سبيرمان نتائج أكثر دقة من معامل ارتباط بيرسون إذا كان حجم العينة صغيراً أقل من ٣٠ مفردة. ومعامل سبيرمان له نفس خصائص معامل بيرسون حيث:

$$-١ \leq ر \leq +١$$

حالة البيانات غير المبوبة:

يستخدم القانون التالى فى الوصول لمعامل الارتباط حيث:

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

حيث ف هى الفروق بين رتب س ورتب ص

ويلاحظ أنه إذا كانت رتب س هى نفس رتب ص المجاورة كانت ف ، $ف^2$ = صفر وبالتالى كان الارتباط تام طردى (+١) كما ينعدم معامل الارتباط إذا كانت ٦ مجــ $ف^2$ = ن ($ن^2$ – ١) أى أن ر = صفر

مثال (١):

احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين عمر الزوج وعمر الزوجة من واقع بيانات العينة التالية:

عمر الزوج	٤٥	٤٠	٥٠	٦٠	٤٨	٣٥	٥٥	٢٥
عمر الزوجة	٤٠	٣٨	٤٢	٥٠	٣٧	٢٥	٤٥	٢٠

الحل:

س	ص	رتب س	رتب ص	الفروق بين الرتب ف	$ف^2$
٤٥	٤٠	٤	٥	١–	١
٤٠	٣٨	٣	٤	١–	١
٥٠	٤٢	٦	٦	صفر	صفر
٦٠	٥٠	٨	٨	صفر	صفر
٤٨	٣٧	٥	٣	٢	٤
٣٥	٢٥	٢	٢	صفر	صفر
٥٥	٤٥	٧	٧	صفر	صفر
٢٥	٢٠	١	١	صفر	صفر
					٦ مجــ $ف^2$

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجــ } ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦×٦}{٨(٦٤-١)}$$

$$= ١ - \frac{٣٦}{٥٠٤}$$

= + ٠,٩٣ ارتباط طردى قوى يقترب من التام بين عمر الزوج وعمر الزوجة

مثال (٢):

احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين تقديرات طالبين أ ، ب فى المواد الدراسية التالية:

	رياضة	محاسبة	قانون	اقتصاد	تكاليف	تأمين	احصاء	انتاج
تقديرات أ	ض	جـ	ض جـ	جـ	جـ جـ	م	أ	جـ جـ
تقديرات ب	جـ	م	م	ض	م	جـ جـ	جـ	أ

الحل:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^2
ض	جـ	٢	٥,٥	-٣,٥	١٢,٢٥
جـ	م	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
ض جـ	م	١	٣	-٢	٤
جـ	ض	٤,٥	١	٣,٥	١٢,٢٥
جـ جـ	م	٦,٥	٣	٣,٥	١٢,٢٥
م	جـ جـ	٣	٧	-٤	١٦
أ	جـ	٨	٥,٥	٢,٥	٦,٢٥
جـ جـ	أ	٦,٥	٨	-١,٥	٢,٢٥
					٦٧,٥ مجـ ف^2

ملاحظات على الجدول السابق:

ترتيب تقديرات س ترتيباً تصاعدياً

ض جـ ١
ض ٢
م ٣
جـ ٤ } $\frac{٤+٥}{٢}$ = ٤,٥ متوسط الرتب فى حالة التكرار وتمنح
جـ ٥ } بالتساوى لنفس التقدير
جـ جـ ٦ } $\frac{٦+٧}{٢}$ = ٦,٥ متوسط الرتب فى حالة التكرار وتمنح
جـ جـ ٧ } بالتساوى لنفس التقدير
أ ٨

<u>ترتيب تقديرات ص ترتيباً تصاعدياً</u>

ض ١
م ٢
م ٣ } $\frac{٢+٣+٤}{٣}$ = ٣ متوسط الرتب وتمنح بالتساوى لنفس التقدير
م ٤
جـ ٥
جـ ٦ } $\frac{٥+٦}{٢}$ = ٥,٥ متوسط الرتب وتمنح بالتساوى لنفس التقدير
جـ جـ ٧
أ ٨

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٦٧,٥}{٨(٦٤ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٤٠٥}{٥٠٤}$$

= + ٠,١٩٦ ارتباط طردى ضعيف بين تقديرات الطالب أ والطالب ب

<u>معامل التحديد: Determination Coefficient</u>

معامل التحديد عبارة عن مربع معامل الارتباط أى أن:

معامل التحديد = $ر^{٢}$

ويعبر معامل التحديد عن النسبة المئوية من التغير الكلى فى المتغير التابع (ص) والتى ترجع إلى أو يتسبب فيها المتغير المستقل (س) ولذلك يطلق على المتغير المستقل (س) المتغير التفسيرى ، وإذا كان التغير الكلى فى المتغير (ص) يمكن أن يقاس بدلالة التباين ($ع^{٢}_{ص}$) لذلك فإن معامل التحديد يحدد النسبة الكلية من هذا التباين التى ترجع إلى أو يتسبب فيها المتغير التفسيرى أو المستقل (س) ويظل هناك جزء آخر من التغير الكلى غير مفسر (متمم النسبة) ويرجع هذا الجزء غير المفسر للتغير العشوائى أو الخطأ العشوائى.

أى أن معامل التحديد = $\frac{\text{التغير المفسر}}{\text{التغير الكلى}}$

ويعتبر معامل التحديد مقياس نسبى لا يتأثر بوحدات القياس.

ويرتبط معامل التحديد بعلاقة سببية بين المتغيرين س ، ص (علاقة انحدارية) بعكس معامل الارتباط الذى لا يرتبط بهذه العلاقة ، كما يشترط أن يكون معامل الانحدار المقدر له معنوية احصائية حتى تتأكد العلاقة السببية بين المتغيرين س ، ص

وإذا كان معامل التحديد = $ر^٢$ ويمثل الجزء المفسر للمتغير التابع فإن معامل عدم التحديد = ١ − $ر^٢$ وهو يمثل الجزء أو النسبة غير المفسرة والتى ترجع للعوامل العشوائية.

وتتراوح قيمة معامل التحديد بين صفر ، +١ أى أن ٠ ≤ $ر^٢$ ≤ ١

وأيضاً يمكن حساب معامل التحديد عن طريق معاملى الانحدار كما يلى:

$ر^٢$ = أ × جـ

ويستخدم معامل التحديد فى الحكم على التوفيق الجيد للبيانات الفعلية أو المشاهدة وعلى سبيل المثال إذا كان معامل التحديد $ر^٢$ = ٨٠٪ فهذا معناه أن خط الانحدار يعطى توفيقاً جيداً للبيانات المشاهدة حيث يفسر المتغير المستقل (س) ٨٠٪ من التغير الكلى فى المتغير التابع (ص)

الفصل الثانى
الانحدار الخطى البسيط
Simple Linear Regression

مقدمة:

تعرضنا فى الفصل السابق لقياس العلاقة أو الارتباط بين المتغيرين س ، ص والآن مطلوب تحديد العلاقة الرياضية أو الدالة التى تربط بين المتغيرين س ، ص من واقع نفس البيانات وتحديد درجة هذه الدالة ومن ثم أياً من المتغيرين متغير مستقل Independent Variable وأيهما متغير تابع Dependent Variable وأخيراً استخدام الدالة التى تحدد العلاقة بين المتغيريين فى التنبؤ بالمتغير التابع بدلالة أى قيمة معطاه للمتغير المستقل.

الانحدار الخطى:

إذا حددنا الشكل الانتشارى لبيانات المتغيرين س ، ص على الرسم البيانى وكانت جميع نقط س ، ص تقع على استقامة واحدة (على مسار خط مستقيم) كانت العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية وكان الارتباط تاماً سواء كان طردياً أو عكسياً ، ولكن عملياً يصعب أن تكون جميع نقط المتغيرين س ، ص على استقامة واحدة ويكون المطلوب فى هذه الحالة تمهيد خط مستقيم يمر بمعظم النقط ويتوسط باتزان باقى النقط الأخرى ويطلق على هذا الخط خط انحدار.

وقد يكون الأنسب تمهيد منحنى منتظم يتوسط معظم النقط وفى هذه الحالة تكون العلاقة بين المتغيرين علاقة غير خطية ، وسنكتفى بدراستنا فى هذا المرجع على العلاقة الخطية فقط بين المتغيرين س ، ص.

طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method

بمقتضى هذه الطريقة إذا أمكننا رسم أكثر من خط مستقيم يمر بمعظم النقط ويتوسط باتزان باقى النقط الأخرى سنجد حتماً أن هناك فروق أو انحرافات موجبة وسالبة بين النقط الأصلية التى تقع فوق أو أسفل الخط وبين النقط الجديدة الاتجاهية والتى تقع على الخط المستقيم الممهد وإذا حسبنا الانحرافات الموجبة والسالبة (الأبعاد الرأسية العمودية) وربعنا هذه الانحرافات وجمعناها فإن أفضل خط مستقيم يتوسط هذه النقط هو الذى يحقق أقل مجموع مربعات الانحرافات أو الفروق بين القيم الأصلية والقيم الجديدة الاتجاهية (التى تقع على خط الاتجاه العام) ولذلك يطلق على هذه الطريقة فى تحديد خط الانحدار الأمثل رياضياً بطريقة المربعات الصغرى.

أولاً: خط انحدار ص على س (ص / س):

(١) حالة البيانات غير المبوبة:

إذا فرضنا أن خط الانحدار الأمثل (ص / س) والذى يتحدد وفقاً لطريقة المربعات الصغرى هو الخط المستقيم الذى معادلته هى:

ص = أ س + ب

ولتحديد خط الانحــدار الســابق (ص / س) لابد من تحــديد المعاملات (أ ، ب) حيث يطلق على (أ) معامل انحدار ص / س وهو عبارة عن

ميل الخط المستقيم والميل يتحدد على أساس ظل الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم (خط الانحدار) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، كما يعبر المعامل (أ) عن معدل التغير فى المتغير التابع (الدالة) ص بالنسبة للمتغير المستقل س ومعدل التغير عبارة عن التفاضل أو المعامل التفاضلى الأول أو المشتقة الأولى (ص = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ أو صَ) ، وإشارة معامل الانحدار (أ) تعبر عن اتجاه العلاقة بين المتغيرين س ، ص أو نوعها (طردية أو عكسية).

ويطلق على المعامل (ب) ثابت الانحدار (المقدار الثابت فى المعادلة الانحدارية) ويمثل الجزء المقطوع من محور الصادات.

ويتم حساب المعاملات أ ، ب على النحو التالى:

بما أن س متغير يمكن أن يأخذ القيم: س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ...... ، س$_{ن}$

بما أن ص متغير يمكن أن يأخذ القيم: ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$ ، .... ، ص$_{ن}$

وبالتعويض فى معادلة الانحدار السابقة عن س بمجموع قيم س وعن ص بمجموع قيم ص نجد أن:

مجـ ص = أ مجـ س + ن ب ⟵ (١)

وبضرب طرفى معادلة الانحدار الأصلية فى المتغير س وإيجاد مجموع الطرفين نجد أن:

مجـ س ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س ⟵ (٢)

ويمكن عن طريق تكوين جدول لقيم المتغيرين س ، ص ثم إيجاد مجاميع الخانات التالية: س ، ص ، $س^{٢}$ ، س ص وبالتعويض عن هذه المجاميع فى المعادلتين السابقتين ثم حل المعادلتين معاً جبرياً نصل لقيم المعاملات أ ، ب أو نقوم بحل المعادلات معاً جبرياً بالرمـــوز نصل لقيم المعاملات أ ، ب عن طريق استخدام القوانين التالية:

الطريقة المطولة:

$$أ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$أ = \frac{ن \times مجـ ح_{س} ح_{ص} - مجـ ح_{س} \times مجـ ح_{ص}}{ن \times مجـ ح_{س}^{٢} - (مجـ ح_{س})^{٢}}$$

ويلاحظ فى القوانين السابقة أن $أ = \frac{التغاير}{تباين\ س}$

ويلاحظ أن هناك علاقة هـــامة بين معامل الارتبـــاط ومعامل انحـــدار ص / س حيث نجد أن:

$$أ = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$$

كما يمكن حساب المعامل (ب) من معادلة انحدار ص / س الأصلية وهى:

ص = أ س + ب

وذلك بعد التعويض عن قيم س بالوسط الحسابى لـــ س = $\overline{\text{س}}$ والتعويض عن قيم ص بالوسط الحسابى لـــ ص = $\overline{\text{ص}}$ يمكن استنتاج (ب) كما يلى:

ب = $\overline{\text{ص}}$ − أ $\overline{\text{س}}$

$$= \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

وبعد الحصـــول على المعـــاملات أ ، ب يمكن استخدام معادلة انحدار ص / س فى التنبؤ بقيمة المتغير التابع ص عند أى قيمة معطاه للمتغير المستقل س.

(٢) حالة البيانات المبوبة:

بنفس طريقة العرض السابق يمكن أن نصل للقوانين التالية والتى تطبق فى حالة البيانات المبوبة فى جداول تكرارية مزدوجة للمتغيرين س ، ص كما يلى:

الطريقة المطولة:

$$\text{أ} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك س} \times \text{مجـ ك ص}}{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س}^{٢} - \left(\text{مجـ ك س}\right)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$\text{أ} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{\text{س}}\text{ ح}_{\text{ص}} - \text{مجـ ك ح}_{\text{س}} \times \text{مجـ ك ح}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{\text{س}}^{٢} - \left(\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}\right)^{٢}}$$

وبعد حساب (أ) بالطريقة المطولة أو المختصرة تستخدم فى إيجادقيمة المعامل (ب) وبنفس العلاقة السابقة حيث:

ب = $\overline{ص}$ – أ $\overline{س}$

ثانياً: خط انحدار س على ص (س / ص):

بفرض أن خط الانحدار الأمثل (س / ص) والذى يتحدد وفقاً لطريقة المربعات الصغرى هو الخط المستقيم الذى معادلته هى:

س = جـ ص + د

حيث (جـ) هى معامل انحدار س على ص (س / ص) ، د هى ثابت الانحدار

وبنفس طريقة العرض السابق يمكن حساب قيم المعاملات (جـ ، د) من القوانين التالية:

(١) حالة البيانات غير المبوبة:

الطريقة المطولة:

$$جـ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ ص^{٢} - (مجـ ص)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$جـ = \frac{ن \times مجـ ح_{س} ح_{ص} - مجـ ح_{س} \times مجـ ح_{ص}}{ن \times مجـ ح_{ص}^{٢} - \left(مجـ ح_{ص}\right)^{٢}}$$

ويلاحظ فى القوانين السابقة أن $\text{جـ} = \frac{\text{التغاير}}{\text{تباين ص}}$

ولذلك هناك علاقة هامة بين معامل الارتباط ومعامل انحـــدار س / ص وهى:

$$\text{جـ} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$$

كما يمكن حساب المعامل (د) من العلاقة التالية:

$$\text{د} = \overline{\text{س}} - \text{جـ}\ \overline{\text{ص}}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} - \text{جـ} \times \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

<u>(٢) حالة البيانات المبوبة:</u>

الطريقة المطولة:

$$\text{جـ} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك س} \times \text{مجـ ك ص}}{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ص}^{٢} - \left(\text{مجـ ك ص}\right)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$\text{جـ} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{\text{س}}\text{ح}_{\text{ص}} - \text{مجـ ك ح}_{\text{س}} \times \text{مجـ ك ح}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{\text{ص}}^{٢} - \left(\text{مجـ ك ح}_{\text{ص}}\right)^{٢}}$$

علاقات هامة:

بما أن $\text{أ} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}}$ ⟵ (١)

بما أن $\text{جـ} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$ ⟵ (٢)

وبضرب العلاقتين السابقتين معاً نجد أن:

$\text{أ} \times \text{جـ} = \text{ر}^{٢}$ (معامل التحديد) ⟵ (٣)

أى يمكن حساب معامل التحديد عن طريق حاصل ضرب معاملى الانحدار.

وبإيجاد الجذر التربيعى لطرفى المعادلة (٣)

$\therefore \text{ر} = \sqrt{\text{أ} \times \text{جـ}}$ ومنها يمكن إيجاد معامل الارتباط عن طريق معاملى الانحدار

ملاحظة هامة: يلاحظ أن إشارة معاملى الانحدار أ ، جـ لابد أن تتشابه أو تتطابق إما الإشارتان موجبتان ويكون معامل الارتباط هو الجذر التربيعى الموجب لـ أ × جـ وإما الإشارتان سالبتان ويكون معامل الارتباط هو الجذر التربيعى السالب لـ أ × جـ

<u>مثال (١):</u>

الأسعار س	١٠	١٢	١٥	٢٠	٣٠	٥٠
الكميات ص	٤	٧	١٢	١٥	١٨	٢٠

المطلوب:

- أوجد معادلة انحدار ص / س وتنبأ بالكميات المتوقعة عندما يكون السعر ١٠٠ جنيه.
- أوجد معادلة انحدار س / ص وتنبأ بالأسعار المتوقعة عندما تكون الكمية ٣٠ وحدة.
- استنتج معامل الارتباط بين المتغيرين بدلالة معاملى الانحدار.

<u>الحل:</u>

س	ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$	س ص
١٠	٤	١٠٠	١٦	٤٠
١٢	٧	١٤٤	٤٩	٨٤
١٥	١٢	٢٢٥	١٤٤	١٨٠
٢٠	١٥	٤٠٠	٢٢٥	٣٠٠
٣٠	١٨	٩٠٠	٣٢٤	٥٤٠
٥٠	٢٠	٢٥٠٠	٤٠٠	١٠٠٠
١٣٧ مجـــ س	٧٦ مجـــ ص	٤٢٦٩ مجـــ $س^{٢}$	١١٥٨ مجـــ $ص^{٢}$	٢١٤٤ مجـــ س ص

- <u>إيجاد معادلة انحدار ص / س</u>

ص = أ س + ب

حيث:

$$أ = \frac{ن \times مجـــ س ص - مجـــ س \times مجـــ ص}{ن \times مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

$$أ = \frac{٦ \times ٢١٤٤ - ١٣٧ \times ٧٦}{٦ \times ٤٢٦٩ - ١٣٧ \times ١٣٧}$$

$\therefore$ أ = ٠,٣٥٨

ب = $\overline{ص}$ − أ $\overline{س}$

$$= \frac{مجـ ص}{ن} - ٠,٣٥٨ \times \frac{مجـ س}{ن}$$

$$= \frac{٧٦}{٦} - ٠,٣٥٨ \times \frac{١٣٧}{٦}$$

$\therefore$ ب = ٤,٤٩٣

$\therefore$ معادلة انحدار ص / س هى:

ص = ٠,٣٥٨ س + ٤,٤٩٣

التنبؤ بالكمية ص عندما يكون السعر س = ١٠٠ جنيه

ص = ٠,٣٥٨ × ١٠٠ + ٤,٤٩٣

$\therefore$ ص = ٤٠,٢٩٣ وحدة

- إيجاد معادلة انحدار س / ص

س = جـ ص + د

حيث:

$$جـ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ ص^{٢} - (مجـ ص)^{٢}}$$

$$\text{جـ} = \frac{\text{٦} \times \text{٢١٤٤} - \text{١٣٧} \times \text{٧٦}}{\text{٦} \times \text{١١٥٨} - \text{٧٦} \times \text{٧٦}}$$

∴ جـ = ٢,٠٩٢

د = $\overline{\text{س}}$ − جـ $\overline{\text{ص}}$

$$= \frac{\text{مجـس}}{\text{ن}} - \text{٢,٠٩٢} \times \frac{\text{مجـص}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{١٣٧}}{\text{٦}} - \text{٢,٠٩٢} \times \frac{\text{٧٦}}{\text{٦}}$$

∴ د = − ٣,٦٦٦

∴ معادلة انحدار س / ص هى:

س = ٢,٠٩٢ ص − ٣,٦٦٦

التنبؤ بالسعر س عندما تكون الكمية ص = ٣٠ وحدة

س = ٢,٠٩٢ × ٣٠ − ٣,٦٦٦

∴ س = ٥٩,٠٩٤ جنيه

- <u>إيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين:</u>

∵ ر = $\sqrt{\text{أ} \times \text{جـ}}$

∴ ر = $\sqrt{\text{٠,٣٥٨} \times \text{٢,٠٩٢}}$

∴ ر = ٠,٨٦٥

ارتباط طردى قوى بين الأسعار والكميات

مثال (٢):

فى المثال (٢) للبيانات المبوبة فى معامل ارتباط بيرسون حيث كانت ر بالطريقة المختصرة المختزلة كما يلى:

$$ر = \frac{-١٥٣٤٤}{\sqrt{١٦١٩٦ \times ٣٤٢٤١}} = \frac{-١٥٣٤٤}{٢٣٥٤٩,٢٤٩} = -٠,٦٥$$ ارتباط عكسى متوسط

المطلوب:

أ – إيجاد معادلة انحدار ص / س وتنبأ بقيمة ص عندما س = ٢٠٠

ب– إيجاد معادلة انحدار س / ص وتنبأ بقيمة س عندما ص = ١١٠

ج– أوجد معامل الارتباط بدلالة معاملى الانحدار

الحل:

أ – إيجاد معادلة انحدار ص / س

ص = أ س + ب

حيث:

$$أ = \frac{\text{بسط معامل الارتباط}}{\text{تباين س}} = \frac{-١٥٣٤٤}{١٦١٩٦} = -٠,٩٤٧٤$$

إيجاد الوسط الحسابى لـــ س:

$$\overline{س} = ط_{س} \times \frac{مجـــ ك_{س} ح_{س}}{مجـــ ك} + أ_{س}$$ (مركز الفئة أمام $ح_{س}$ = صفر)

$\overline{س} = ٢٠ \times \frac{-٥٢}{١٥٠} + ١٥٠ = ١٤٣,٠٦٧$

$\overline{ص} = ط_{ص} \times \frac{مجـ ك_{ص} ح_{ص}}{مجـ ك} + أ_{ص}$ (مركز الفئة أمام $ح_{ص}$ = صفر)

$\overline{ص} = ١٠ \times \frac{-٤٧}{١٥٠} + ٧٥ = ٧١,٨٦٧$

$ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$

$= ٧١,٨٦٧ - (-٠,٩٤٧٤ \times ١٤٣,٠٦٧)$

$\therefore$ ب = ٢٠٧,٤٠٩

وتكون معادلة انحدار ص / س هى:

ص = أ س + ب

ص = − ٠,٩٤٧٤ س + ٢٠٧,٤٠٩

عندما س = ٢٠٠

$\therefore$ ص = − ٠,٩٤٧٤ × ٢٠٠ + ٢٠٧,٤٠٩ = ١٨ تقريباً

<u>ب− إيجاد معادلة انحدار س / ص</u>

س = جـ ص + د

حيث $جـ = \frac{بسط\ معامل\ الارتباط}{تباين\ ص} = \frac{-١٥٣٤٤}{٣٤٢٤١} = -٠,٤٤٨١$

$د = \overline{س} - أ \overline{ص}$

= ١٤٣,٠٦٧ – (–٠,٤٤٨١ × ٧١,٨٦٧)

∴ د = ١٧٥,٢٧١

وتكون معادلة انحدار س / ص هى:

س = جـ ص + د

س = – ٠,٤٤٨١ ص + ١٧٥,٢٧١

عندما ص = ١١٠

∴ س = – ٠,٤٤٨١ × ١١٠ + ١٧٥,٢٧١ = ١٢٦ تقريباً

جـ- إيجاد معامل الارتباط ر

ر = √(أ × جـ)

ر = √(–٠,٩٤٧٤ × –٠,٤٤٨١)

∴ ر = –٠,٦٥ ارتباط عكسى متوسط وهى نفس الإجابة التى سبق أن توصلنا إليها عند حل المثال الثانى للبيانات المبوبة فى معامل ارتباط بيرسون.

مثال (٣):

إذا كان الوسط الحسابى لعمر الزوج ٥٠ سنة والوسط الحسابى لعمر الزوجة ٤٥ سنة والانحراف المعيارى لعمر الزوج ٥ سنة والانحراف المعيارى لعمر الزوجة ٦ سنة ومعامل الارتباط بين عمر الزوج وعمر الزوجة = ٠,٨ أوجد معادلة انحدار عمر الزوجة على عمر الزوج واحسب عمر الزوجة المتوقع عندما يكون عمر الزوج ٦٠ سنة

الحل:

$\overline{س} = ٥٠$ $\qquad\qquad$ $\overline{ص} = ٤٥$

$ع_{س} = ٥$ $\qquad\qquad$ $ع_{ص} = ٦$

ر = ٠,٨

معادلة انحدار ص / س هى:

ص = أ س + ب

بما أن $أ = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$

$\therefore$ $أ = ٠,٨ \times \frac{٦}{٥} = ٠,٩٦$

بما أن $ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$

$\therefore$ ب = ٤٥ – ٠,٩٦ × ٥٠ = –٣

وتكون معادلة انحدار عمر الزوجة على عمر الزوج هى:

ص = ٠,٩٦ –٣

وعندما س = ٦٠

$\therefore$ ص = ٠,٩٦ × ٦٠ – ٣ = ٥٤,٦ سنة

مثال (٤):

إذا كانت معادلتى خط انحدار متغيرين س ، ص هما:

١٠٠ ص = ٤٥ س – ١١٥

٤٠ س = ٨٠ ص + ٨,٥

احسب معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص

الحل:

يتم وضع المعادلتين السابقتين على صورة:

ص = أ س + ب ، س = جـ ص + د

ولذلك يتم تحويل معامل كل من س ، ص فى الطرف الأيمن إلى الواحد الصحيح كما يلى:

بقسمة طرفى المعادلة الأولى على ١٠٠ وبقسمة طرفى المعادلة الثانية على ٤٠

∴ ص = ٠,٤٥ س – ١,١٥

∴ س = ٢ ص + ٠,٢١٢٥

∴ أ = ٠,٤٥ ، جـ = ٢

ر = $\sqrt{أ \times جـ}$ = $\sqrt{٠,٤٥ \times ٢}$

∴ ر = + ٠,٩٥ ارتباط طردى قوى بين المتغيرين س ، ص يقترب من الارتباط التام

تمارين على الباب الثالث

١.

الأسعار	١٥	٢٠	٣٠	٤٥	٦٥	٧٠	٩٠	٧٠	١٠٠	٧٠
الكميات	٦	٨	٦	١٠	١٢	١٥	٦	٨	١١	١٥

المطلوب:

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون بين الأسعار والكميات

ب – احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين الأسعار والكميات

جـ– أوجد معادلة انحدار الأسعار على الكميات وتنبأ بالسعر عندما تكون الكمية ٢٠ وحدة

د – أوجد معادلة انحدار الكميات على الأسعار وتنبأ بالكمية عندما يكون السعر ١٢٠ جنيه

هـ– تأكد من صحة معامل ارتباط بيرسون عن طريق معاملى الانحدار

٢. فيما يلى تقديرات طالبين أ ، ب فى مواد البرنامج التدريبى المختلفة:

المادة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الطالب أ	أ	ج	أ	ج ج	م	ج	ج	ج ج	ض	م
الطالب ب	ج ج	ج	ج ج	أ	ض	ج	أ	ج	م	ج ج

احسب معامل ارتباط سبيرمان بين تقديرات أ ، ب وعلق على الناتج

٣. فيما يلى عينة حجمها ١٥٠ وحدة منتجة موزعة حسب سعر التكلفة وسعر البيع:

سعر البيع / سعر التكلفة	١٢-	١٥-	١٨-	٢١-	٢٤-٢٧	المجموع
١٠-	١٥	١٨	–	–	–	٣٣
١٤-	–	٢٥	٢٧	٣٣	–	٨٥
١٨-٢٢	–	–	٧	١٢	١٣	٣٢
المجموع	١٥	٤٣	٣٤	٤٥	١٣	١٥٠

المطلوب:

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون

ب– أوجد معادلة انحدار سعر البيع على سعر التكلفة وتنبأ بسعر البيع عندما تكون التكلفة ٣٠ جنيه

جـ – أوجد معادلة انحدار سعر التكلفة على سعر البيع وتنبأ بسعر التكلفة عندما يكون سعر البيع ٥٠ جنيه

د – احسب معامل ارتباط بيرسون عن طريق معاملى الانحدار

٤. فيما يلى عينة حجمها ١٢٥ وحدة منتجة موزعة حسب الأرباح الصافية والتكاليف الكلية:

التكاليف / الأرباح	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-١٦٠	المجموع
٢٠-	–	–	٤	١٥	١٩
٢٥-	–	–	٢٥	١١	٣٦
٣٠-	–	١٣	٢٧	–	٤٠
٣٥-٤٠	١٢	١٨	–	–	٣٠
المجموع	١٢	٣١	٥٦	٢٦	١٢٥

المطلوب:

أ – حساب معامل ارتباط بيرسون

ب– أوجد معادلة انحدار الأرباح على التكاليف وتنبأ بالأرباح عندما تكون التكاليف ٢٠٠ جنيه

جـ – احسب معامل التحديد واشرح مدلوله

٥. بلغ معـــامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص ٠,٦ والوسط الحسابى لــ س = ٢٥ والوسط الحسابى لــ ص = ٣٠ وتباين س = ١٦ وتباين ص = ٣٦

المطلوب:

أ – أوجد معادلة انحدار ص / س وتنبأ بقيمة ص عندما س = ٥٠

ب– أوجد معادلة انحدار س / ص وتنبأ بقيمة س عندما ص = ٣٠

٦. إذا علم أن:

مجـ س = ٤٠ ، مجـ ص = ١٢٢ ، مجـ $س^{٢}$ = ٣٤٦ ، مجـ $ص^{٢}$=٣٠٩٤

مجـ س ص = ١٠٢١

المطلوب:

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص

ب– أوجد معادلة انحدار ص / س

جـ – أوجد معادلة انحدار س / ص

.٧

الدخل	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٧٠٠	١٠٠٠
الاستهلاك	١٠٠	١٥٠	٢١٠	٢٧٠	٣٢٠	٤٥٠	٦٠٠	٩٠٠

أ - احسب معامل ارتباط بيرسون بين الدخل والاستهلاك

ب- احسب معامل ارتباط سبيرمان بين الدخل والاستهلاك

ج - أوجد معادلة انحدار الدخل على الاستهلاك وتنبأ بالدخل المتوقع عندما يكون الاستهلاك ١٠٠٠ جنيه

د - استنتج معامل انحدار الاستهلاك على الدخل بمعلومية معامل الارتباط ومعامل انحدار الدخل على الاستهلاك

هـ- احسب معامل التحديد مع التفسير

٨. لدينا عينة حجمها ١٥٠ شخصاً موزعون حسب الاستهلاك الشهرى والادخار الشهرى:

الاستهلاك / الادخار	-١٠٠	-١٥٠	-٢٠٠	٢٥٠-٣٠٠	المجموع
٥٠	-	-	١١	١٥	٢٦
٨٠	-	٥	٢٥	٧	٣٧
١١٠	١٢	٤٠	١٧	-	٦٩
١٤٠	١٠	٨	-	-	١٨
المجموع	٢٢	٥٣	٥٣	٢٢	١٥٠

المطلوب:

أ - احسب معامل ارتباط بيرسون بين الاستهلاك والادخار

ب- أوجد معادلة انحدار الادخار على الاستهلاك وتنبأ بالادخار المتوقع عندما يكون الاستهلاك ٥٠٠ جنيه

الباب الرابع

تحليل السلاسل الزمنية

Time Series Analysis

السلسلة الزمنية:

عبارة عن علاقة بين متغيرين ، أحدهما متغير مستقل وهو الزمن ولنرمز له بالرمز (س) ويعبر عنه بمجموعة من الفترات الزمنية المتتالية أو المتتابعة (سنوات أو شهور أو أسابيع أو أيام ...) ومتغير آخر تابع ولنرمز له بالرمز (ص) وهو غالباً ما يكون أحد المتغيرات الاقتصادية الهامة مثل:(الإنتاج – الصادرات – الواردات – المبيعات .....) أى أن:

ص = د (س)

وتستخدم السلسلة الزمنية التاريخية فى تحديد شكل الاتجاه العام للظاهرة مع التوقع بإمتداد هذا الاتجاه العام فى المستقبل القريب حتى يمكن التنبؤ بالقيم المختلفة للظاهرة مستقبلاً.

عناصر السلسلة الزمنية:

يهدف تحليل السلسلة الزمنية إلى التعرف على حركة وسلوك الظاهرة فى الماضى بعد تحديد عناصر أو مكونات السلسلة الزمنية والتغيرات التى تطرأ عليها أو تلازمها من حيث طبيعتها ومقدارها واتجاهها وتتلخص عناصر السلسلة الزمنية فيما يلى:

(١) الاتجاه العام Secular Trend

(٢) التغيرات الموسمية Seasonal Variations

(٣) التغيرات الدورية Cyclical Variations

(٤) التغيرات العرضية Irregular Variations

(١) الاتجاه العام: Secular Trend

الاتجاه العام هو المسار العام للسلسلة الزمنية وفقاً للبيانات التاريخية عن الظاهرة والذى يعبر عن حركة البيانات على مدار فترة طويلة فى الماضى والتى تبين الزيادة أو النقص أو الثبات من فترة لأخرى وهى التغيرات المنتظمة أو التى تبين عدم وجود أى علاقة أو اتجاه عام وهى تغيرات غير منتظمة ، وقد يكون الاتجاه العام خطى أو غير خطى ولكن ستقتصر دراستنا فى هذا الباب على الاتجاه العام الخطى.

(٢) التغيرات الموسمية: Seasonal Variations

وهى تغيرات منتظمة على فترات عادة أقل من سنة ، قد تكون يومية أو أسبوعية أو شهرية أو ربع سنوية أو نصف سنوية ، وعلى سبيل المثال فالمثلجات تباع فى موسم الصيف أكثر من المواسم الأخرى واستهلاك الكهرباء فى المنازل ليلاً أكثر من نهاراً وهكذا ....

(٣) التغيرات الدورية: Cyclical Variations

هى تغيرات منتظمة على فترات عادة أكثر من سنة مثل فترات الرواج والكساد وهى تتم على فترات طويلة قد تصل إلى ١٠ سنوات أو أكثر حيث تتوقف على الظروف الداخلية للدولة والظروف الخارجية المحيطة بها.

(٤) التغيرات العرضية: Irregular Variations

هى تغيرات غير منتظمة وغير متوقعة وتحدث نتيجة ظروف طارئة ومفاجئة مثل الحروب والزلازل والبراكين والفيضانات والأوبئة بحيث

يصعب التنبؤ بهذه التغيرات وتحديد حجمها ويطلق عليها عادةً التغيرات العشوائية.

نماذج تحليل السلاسل الزمنية:

يوجد عدة نماذج لتحليل السلاسل الزمنية عن طريق مكوناتها أو عناصرها الأربع السابقةومن أهمها:

١ – نموذج حاصل الجمع:

وبمقتضاه تتحدد قيمة الظاهرة عند أى نقطة زمنية بحاصل جمع القيمة الاتجاهية عند هذه النقطة مضافاً إليها قيم التغيرات الموسمية والتغيرات الدورية والتغيرات العرضية ، وهذه العلاقة تعنى أن قيمة العناصر الأربعة مستقلة لا تتأثر ولا تؤثر فى بعضها البعض.

٢ – نموذج حاصل الضرب:

وبمقتضاه تتحدد قيمة الظاهرة عند أى نقطة زمنية بحاصل ضرب العناصر الأربعة (القيمة الاتجاهية والتغيرات الموسمية والتغيرات الدورية والتغيرات العرضية) ، والتغير فى الاتجاه العام (العنصر الأول) هو الذى يتحدد بوحدات القياس الأصلية وباقى التغيرات (الموسمية والدورية والعرضية) تظهر كنسب مئوية من التغير العام فى الاتجاه العام (بدون وحدات قياس) وبالتالى تعتبر التغيرات الأربع متغيرات غير مستقلة تؤثر فى بعضها البعض ، ويعتبر نموذج حاصل الضرب هو الأكثر شيوعاً واستخداماً لأن نتائجه أكثر دقة.

وسنكتفى فيما يلى بدراسة طرق تحديد الاتجاه العام للسلسلة الزمنية (العنصر الأول) بالإضافة إلى دراسة تحليل التغيرات الموسمية (العنصر الثانى) كل على حدة أى دراسة كل عنصر على حدة مع عزل أو وقف تأثير تغيرات العناصر الأخرى.

طرق تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية:

يتم تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بمجموعة من الطرق نلخص أهمها فيما يلى:

(١) الطريقة البيانية:

يتم تمثيل السنوات عادة على المحور الأفقى والقيم المختلفة للظاهرة على المحور الرأسى ، ويتم وضع أو تسجيل النقط التاريخية الفعلية للظاهرة على مدار الفترات الزمنية المختلفة وبتوصيل هذه النقط ببعضها البعض يظهر الشكل التاريخى للسلسلة الزمنية وعادة ما تكون سلسلة غير منتظمة ولتفادى الانكسارات المختلفة والقيم الشاذة الأخرى فى المنحنى التاريخى يتم تمهيد خط مستقيم أو منحنى باليد بحيث يمر الخط أو المنحنى بأغلب النقط المختلفة للظاهرة ويتوسط باقى النقط الأخرى على مسافات متساوية تقريباً بحيث يكون عدد النقط فوق أو على يمين الخط المستقيم أو المنحنى مساوياً تقريباً لعدد النقط أسفل أو على يسار الخط المستقيم أو المنحنى وهذه الطريقة بالرغم من أنها تمتاز بالسهولة إلا أنها تعتمد على مهارة الباحث بالرسم وتعطى نتائج مختلفة من شخص لآخر.

(٢) طريقة شبه المتوسطات (طريقة متوسطى نصفى السلسلة):

بمقتضاها يتم تقسيم بيانات السلسلة الزمنية إلى نصفين متتاليين ، ثم يتم حساب الوسط الحسابى لبيانات الظاهرة فى النصف الأول للسلسلة وأيضاً الوسط الحسابى للنصف الثانى من السلسلة ويتم وضع قيم الوسطين الحسابيين على الرسم البيانى ويسجل كل وسط حسابى فى مركز أو منتصف نصف السلسلة ، ثم يرسم خط مستقيم يمر بالوسطين الحسابيين فيتحدد خط الاتجاه العام ، وإذا كان عدد الفترات فردياً فيتم إهمال الفترة الوسطى أوالفترة الأولى أوالفترة الأخيرة وذلك حتى يصبح عدد الفترات زوجياً بحيث يتم تقسيمه إلى نصفين متساويين ، ويعيب هذه الطريقة أنها تعتمد على الأوساط الحسابية التى تتأثر بالقيم الشاذة وبالتالى يتأثر الخط المستقيم بهذه القيم الشاذة إذا كانت موجودة.

مثال:

فيما يلى بيان بالمبيعات السنوية بآلاف الجنيهات لإحدى المؤسسات التجارية خلال السنوات ٢٠٠٤ إلى ٢٠١٢

السنة	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢
المبيعات	٢٥	٥٠	٦٥	٨٠	١٠٠	١١٠	١٣٠	١٥٠	١٩٠

استخدم طريقة متوسطى نصفى السلسلة فى تحديد خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

الحل:

نظراً لأن بيانات السلسلة الزمنية السابقة عن فترة ٩ سنوات وهو رقم فردى لذلك يمكن إهمال بيانات السنة الوسطى وهى سنة ٢٠٠٨

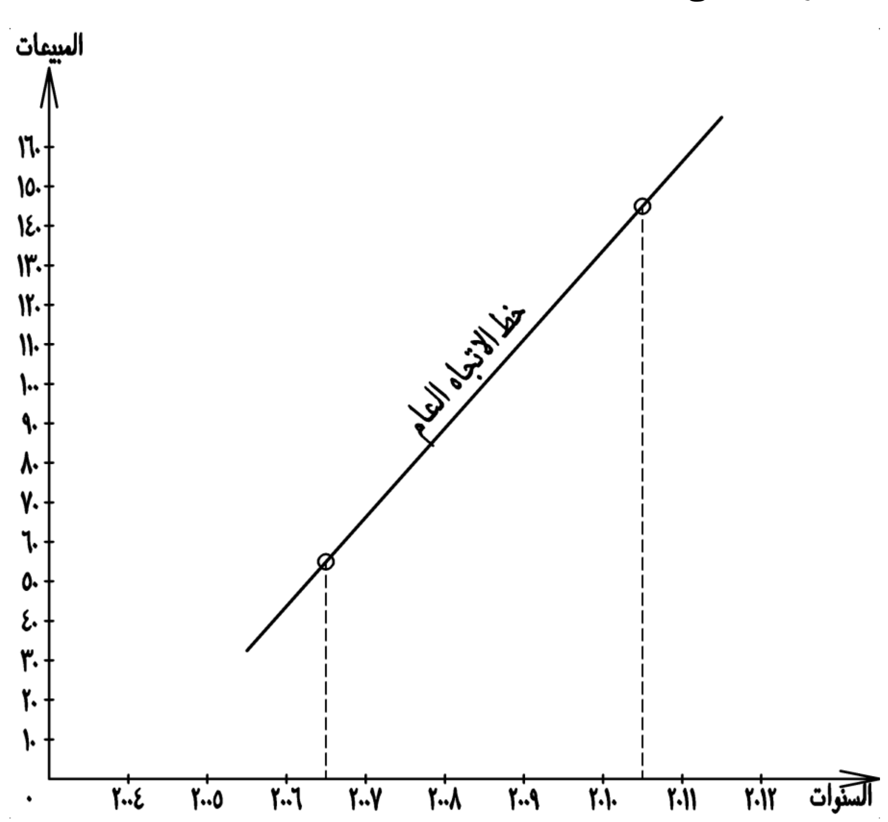
الوسط الحسابى البسيط لمبيعات السنوات الأربع الأولى

$$= \frac{٢٥+٥٠+٦٥+٨٠}{٤} = \frac{٢٢٠}{٤} = ٥٥$$

الوسط الحسابى البسيط لمبيعات السنوات الأربع الأخيرة

$$= \frac{١١٠+١٣٠+١٥٠+١٩٠}{٤} = \frac{٥٨٠}{٤} = ١٤٥$$

ويتم تسجيل الوسطين الحسابيين السابقين عل الرسم البيانى أمام منتصف كل فترة كما يلى:



(٣) طريقة المتوسطات المتحركة:

إذا كانت البيانات التاريخية التى تعبر عنها السلسلة الزمنية أو خط الاتجاه العام تتعرض لذبذبات أو تغيرات غير منتظمة تتم على فترات زمنية شبة ثابتة وللتغلب على هذه الذبذبات يمكن حساب الوسط الحسابى للبيانات التاريخية لفترة معينة ويسجل الوسط الحسابى فى منتصف الفترة ، ثم نحذف بيانات الوحدة الأولى داخل الفترة ونُدخل بدلاً منها بيانات الوحدة الأولى من الفترة التالية لفترة الذبذبة ثم نحسب وسط حسابى جديد متحرك ونكرر هذه العملية لباقى البيانات المتتالية أو المتتابعة وبالتالى يكون لدينا فى النهاية سلسلة جديدة تتكون من المتوسطات المتحركة وتسجل هذه المتوسطات المتحركة على الرسم البيانى وبالتوصيل بينها يتحدد خط أو منحنى الاتجاه العام للسلسلة.

ويؤخذ على هذه الطريقة أن عدد القيم الاتجاهية يكون أقل من عدد القيم الأصلية كما لا توجد هناك دالة رياضية يمكن استخدامها فى التنبؤ مستقبلاً.

(٤) طريقة المربعات الصغرى:

بمقتضاها يتم توفيق خط مستقيم يتوسط البيانات التاريخية للسلسلة الزمنية ويعتبر الخط الأمثل الذى يتوسط النقط هو الذى يعطى أقل مجموع مربعات للانحرافات بين القيم الأصلية للبيانات التاريخية والقيم الجديدة الاتجاهية على الخط المستقيم الممهد ، وتتحدد معادلة الخط المستقيم الذى يحقق الشرط السابق بالمعادلة التالية:

ص = أ س + ب

حيث ص المتغير التابع ، س تمثل دائماً الفترات ، أ معامل انحدار الخط المستقيم أى ميل الخط المستقيم الذى يتحدد بظل الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ب ثابت الانحدار وتمثل الجزء المقطوع من محور الصادات.

ويتم ايجاد قيم أ ، ب بحل المعادلتين التاليتين معاً:

- مجـــ ص = أ مجـــ س + ن ب
- مجـــ س ص = أ مجـــ $س^{٢}$ + ب مجـــ س

وبحل المعادلتين السابقتين معاً جبرياً يمكننا التوصل للقوانين التالية:

$$أ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

$$ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$$

$$= \frac{مجـ ص}{ن} - أ \times \frac{مجـ س}{ن}$$

<u>الطريقة المختصرة:</u>

عند تحديد نقطة الأصل (سنة الأساس أو الوسط الفرضى) وكانت هى السنة أو الفترة الوسطى للبيانات إذا كان عدد السنوات فردياً أو منتصف الفترتين المركزيتين للبيانات إذا كان عدد السنوات زوجياً وذلك حتى يصبح مجموع قيم س = صفر أى أن مجـــ س = صفر.

وبالتعويض عن مجـــ س = صفر فى القوانين السابقة يمكن تبسيطها إلى ما يلى:

$$\text{أ} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{٢}}$$

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}}$$

$$= \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

<u>مثال (١):</u>

فيما يلى بيان بكمية الإنتاج بالطن لإحدى المصانع عن السنوات ٢٠٠٧ إلى ٢٠١٣

السنة	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
كمية الإنتاج	٤٠	٨٠	١٢٠	١٦٠	٢٠٠	٢٥٠	٢٧٠

حدد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة معتبراً سنة ٢٠٠٧ هى نقطة أصل (وسط فرضى) مع تحديد القيمة الاتجاهية والقيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام ثم تنبأ بالإنتاج عام ٢٠١٦

<u>الحل:</u>

السنة	ص	س	س ص	$س^2$	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}} \times ١٠٠$
٢٠٠٧	٤٠	٠	٠	٠	٤١,٢	٩٧٪
٢٠٠٨	٨٠	١	٨٠	١	٨٠,٨	٩٩٪
٢٠٠٩	١٢٠	٢	٢٤٠	٤	١٢٠,٤	٩٩٪
٢٠١٠	١٦٠	٣	٤٨٠	٩	١٦٠	١٠٠٪
٢٠١١	٢٠٠	٤	٨٠٠	١٦	١٩٩,٦	١٠٠,٢٪
٢٠١٢	٢٥٠	٥	١٢٥٠	٢٥	٢٣٩,٢	١٠٤,٥٪
٢٠١٣	٢٧٠	٦	١٦٢٠	٣٦	٢٧٨,٨	٩٧٪
المجموع	١١٢٠ مج ص	٢١ مج س	٤٤٧٠ مج س ص	٩١ $مج\ س^2$		

<u>نفرض أن معادلة خط الاتجاه العام هى:</u>

ص = أ س + ب

$$حيث\ أ = \frac{ن \times مج\ س\ ص - مج\ س \times مج\ ص}{ن \times مج\ س^2 - (مج\ س)^2}$$

$$أ = \frac{٧ \times ٤٤٧٠ - ٢١ \times ١١٢٠}{٧ \times ٩١ - ٢١ \times ٢١} = ٣٩,٦$$

$$ب = \overline{ص} - أ\ \overline{س}$$

$$= \frac{مج\ ص}{ن} - أ \times \frac{مج\ س}{ن} = \frac{١١٢٠}{٧} - ٣٩,٦ \times \frac{٢١}{٧} = ٤١,٢$$

∴ معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هى:

ص = ٣٩,٦ س + ٤١,٢

القيم الاتجاهية صَ^:

القيم الاتجاهية للمتغير التابع ص ولنرمز لها بالرمز صَ^ هى القيم الجديدة التى تم نقلها من القيم الأصلية (التاريخية) إلى خط الاتجاه العام ، وتنتج هذه القيم بالتعويض فى معادلة الاتجاه العام التالية:

صَ^ = ٣٩,٦ س + ٤١,٢

ويتم التعويض فى هذه المعادلة عن س بالانحرافات من صفر إلى ٧ (وهى الانحرافات بين السنوات الأصلية ونقطة الأصل) وذلك للحصول على القيم الاتجاهية المقابلة للقيم الأصلية كما يلى:

عندما س = صفر:

فإن صَ^ = ٣٩,٦ × صفر + ٤١,٢ = ٤١,٢

عندما س = ١:

فإن صَ^ = ٣٩,٦ ×١ + ٤١,٢ = ٨٠,٨

عندما س = ٢:

فإن صَ^ = ٣٩,٦ ×٢ + ٤١,٢ = ١٢٠,٤

وهكذا يتم التعويض عن س = ٣ ثم ٤ ثم ٥ ثم ٦ ثم ٧ وتسجل النتائج فى الجدول السابق فى عمود (صَ^) كما يمكن إضافة أو جمع أ على أى قيمة اتجاهية لإيجاد القيمة الاتجاهية التالية وهكذا.
وللوصول للقيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام (القيم الاتجاهية المعدلة) ننسب القيم الأصلية للقيم الاتجاهية المناظرة ونحولها لنسبة مئوية

بالضرب فى ١٠٠ فتتحدد الخــانة الأخــيرة فى الجــدول الســابق عمود ($\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠٪)

<u>التنبؤ بالإنتاج عام ٢٠١٦</u>

س = السنة المطلوبة – نقطة الأصل

= ٢٠١٦ – ٢٠٠٧ = ٩

∴ ص = ٣٩,٦ × ٩ + ٤١,٢ = ٣٩٧,٦ طن

<u>حل آخر باستخدام الطريقة المختصرة:</u>

سنقوم بإعادة حل المثال السابق بطريقة أخرى مختصرة وذلك بنقل نقطة الأصل أو الوسط الفرضى إلى السنة الوسطى وهى ٢٠١٠ كما يلى:

السنة	ص	س	س ص	$س^2$	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠
٢٠٠٧	٤٠	٣–	١٢٠–	٩	٤١,٢	٪٩٧
٢٠٠٨	٨٠	٢–	١٦٠–	٤	٨٠,٨	٪٩٩
٢٠٠٩	١٢٠	١–	١٢٠–	١	١٢٠,٤	٪٩٩
٢٠١٠	١٦٠	صفر	صفر	صفر	١٦٠	٪١٠٠
٢٠١١	٢٠٠	١	٢٠٠	١	١٩٩,٦	٪١٠٠,٢
٢٠١٢	٢٥٠	٢	٥٠٠	٤	٢٣٩,٢	٪١٠٤,٥
٢٠١٣	٢٧٠	٣	٨١٠	٩	٢٧٨,٨	٪٩٧
المجموع	١١٢٠ مجـ ص	صفر مجـ س	١١١٠ مجـ س ص	٢٨ مجـ $س^2$		

ونظراً لأن مجــ س = صفر تختصر القوانين السابقة لإيجاد أ ، ب كما يلى:

$$أ = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^2} = \frac{١١٢٠}{٢٨} = ٣٩,٦$$

$$ب = \overline{ص} = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{١١٢٠}{٧} = ١٦٠$$

∴ ص = ٣٩,٦ س + ١٦٠

<u>التنبؤ بالإنتاج عام ٢٠١٦</u>

س = السنة المطلوبة – نقطة الأصل

= ٢٠١٦ – ٢٠١٠ = ٦

∴ ص = ٣٩,٦ × ٦ + ١٦٠ = ٣٩٧,٦ طن

وهى نفس الإجابة السابقة تماماً

وللوصول للقـــيم الاتجاهية ($\hat{ص}$) يتم التعويض فى معادلة الاتجاه العام $\hat{ص}$ = ٣٩,٦ س + ١٦٠ عن س بالقيم من –٣ إلى +٣ ينتج العمود السادس $\hat{ص}$ وهو لا يختلف عما توصلنا إليه عند الحل بالطريقة المطولة وبالتالى لا يختلف العمود الأخير ($\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠)

<u>مثال (٢):</u>

حدد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية التالية ثم تنبأ بالصادرات المتوقعة عام ٢٠١٥

السنة	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
الصادرات بالمليون ج	١٠	١٢	١٨	٢٠	٢٥	٣٢	٤٠	٥٠

<u>الحل:</u>

الطريقة المختصرة:

السنة	ص	س	$س^{٢}$	س ص	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}} \times ١٠٠$
٢٠٠٦	١٠	-٧	٤٩	-٧٠	٦,٤٢	١٥٥,٧٦٪
٢٠٠٧	١٢	-٥	٢٥	-٦٠	١١,٩٨	١٠٠,١٧٪
٢٠٠٨	١٨	-٣	٩	-٥٤	١٧,٥٤	١٠٢,٦٢٪
٢٠٠٩	٢٠	-١	١	-٢٠	٢٣,١٠	٨٦,٨٥٪
٢٠١٠	٢٥	١	١	٢٥	٢٨,٦٦	٨٧,٢٣٪
٢٠١١	٣٢	٣	٩	٩٦	٣٤,٢٢	٩٣,٥١٪
٢٠١٢	٤٠	٥	٢٥	٢٠٠	٣٩,٧٨	١٠٠,٥٥٪
٢٠١٣	٥٠	٧	٤٩	٣٥٠	٤٥,٣٤	١١٠,٢٨٪
المجموع	٢٠٧ مج ص	صفر مج س	١٦٨ مج $س^{٢}$	٤٦٧ مج س ص		

ملاحظات على الجدول السابق:

اعتبرنا نقطة الأصل (الوسط الفرضى) منتصف عامى ٢٠٠٩ ، ٢٠١٠ (السنتان المتوسطتان) وليكن حسابياً الوسط الفرضى هو ٢٠٠٩,٥ ، فكانت الانحرافات بين ٢٠٠٩,٥ وجميع السنوات الأخرى كما يلى:

السنة	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
الانحرافات	-٣,٥	-٢,٥	-١,٥	-٠,٥	٠,٥	١,٥	٢,٥	٣,٥

وللتخلص من الكسور نضرب الانحرافات الكسرية السابقة فى الرقم ٢ فتصبح: -٧ ، -٥ ، -٣ ، -١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧

وبالتالى تصبح س = ٢ (السنة المطلوبة – نقطة الأصل)

وبفرض أن معادلة الاتجاه العام هى:

ص = أ س + ب

$$\text{حيث أ} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{2}} = \frac{٤٦٧}{١٦٨} = ٢,٧٨$$

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٢٠٧}{٨} = ٢٥,٨٨$$

∴ ص = ٢,٧٨ س + ٢٥,٨٨

التنبؤ بالإنتاج عام ٢٠١٥

س = ٢ (السنة المطلوبة – نقطة الأصل)

= ٢ (٢٠١٥ – ٢٠٠٩,٥) = ١١

∴ ص = ٢,٧٨ × ١١ + ٢٥,٨٨ = ٥٦,٤٦ مليون جنيه

الدليل الموسمى:

تحديد خط الاتجاه العام فى ظل التقلبات الموسمية:

كثير من الظواهر تخضع لتقلبات موسمية منتظمة على فترات أقل من سنة ويمكن التنبؤ بها وحسابها بدقة استناداً للتحرك المنتظم لهذه التقلبات على مدار فترات زمنية طويلة فى الماضى ، وهذه التقلبات قد تكون يومية أو أسبوعية أو شهرية أو ربع سنوية أو نصف سنوية ، وللأخذ فى

الاعتبار تأثير هذه التقلبات على خط الاتجاه العام يمكن توضيحها من خلال المثال التالى:

<u>مثال:</u>

فيما يلى قيمة الإنتاج بالألف جنيه لإحدى الشركات الصناعية خلال الفترات الربع سنوية للأعوام ٢٠١٢ ، ٢٠١٣ ، ٢٠١٤

السنة	٢٠١٢				٢٠١٣				٢٠١٤			
الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
الانتاج	١٢	٢٠	١٥	٣٠	١٥	٣٥	٢٥	٤٠	٢٥	٤٠	٣٣	٥٠

المطلوب:

١. تحديد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة
٢. حساب القيم الاتجاهية والقيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام
٣. إعداد الدليل الموسمى
٤. التنبؤ بقيمة الإنتاج الربع سنوى المتوقع خلال عام ٢٠١٥

<u>الحل:</u>

<u>تحديد معادلة خط الاتجاه العام:</u>

السنة	الربع	ص	س	س ص	$س^{٢}$	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}} \times ١٠٠$
٢٠١٢	الأول	١٢	٠	٠	٠	١٣,٩١	٨٦,٢٦٩٪
	الثانى	٢٠	١	٢٠	١	١٦,٥٣٢	١٢٠,٩٧٧٪
	الثالث	١٥	٢	٣٠	٤	١٩,١٥٤	٧٨,٣١٣٪
	الرابع	٣٠	٣	٩٠	٩	٢١,٧٧٦	١٣٧,٧٦٦٪
٢٠١٣	الأول	١٥	٤	٦٠	١٦	٢٤,٣٩٨	٦١,٤٨٪
	الثانى	٣٥	٥	١٧٥	٢٥	٢٧,٠٢	١٢٩,٥٣٤٪
	الثالث	٢٥	٦	١٥٠	٣٦	٢٩,٦٤٢	٨٤,٣٤٠٪
	الرابع	٤٠	٧	٢٨٠	٤٩	٣٢,٢٦٤	١٢٣,٩٧٧٪
٢٠١٤	الأول	٢٥	٨	٢٠٠	٦٤	٣٤,٨٨٦	٧١,٦٦٢٪
	الثانى	٤٠	٩	٣٦٠	٨١	٣٧,٥٠٨	١٠٦,٦٤٤٪
	الثالث	٣٣	١٠	٣٣٠	١٠٠	٤٠,١٣	٨٢,٢٣٣٪
	الرابع	٥٠	١١	٥٥٠	١٢١	٤٢,٧٥٢	١١٦,٩٥٤٪
المجموع		٣٤٠ مج ص	٦٦ مج س	٢٢٤٥ مج س ص	٥٠٦ مج $س^{٢}$		

ملاحظة:

اعتبرنا الربع الأول لعام ٢٠١٢ هو نقطة الأصل (الوسط الفرضى) وتم طرحه من باقى الفتــرات الربع سنوية فكانت الانحرافات على الترتيب : ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... ، ١١ كما يمكن الحل بالطريقة المختصرة باعتبار منتصف المسافة بين الربع الثانى والثالث لعام ٢٠١٣ هى نقطة الأصل (الوسط الفرضى) ونظراً لأن عدد الفترات الربع سنوية عدد زوجى (١٢ ربع) فتكون الانحرافات على الترتيب: -١١ ، -٩ ، -٧ ، ..... ، +١١

وبفرض أن معادلة خط الاتجاه العام هى:

ص = أ س + ب

$$\text{حيث أ} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن} \times \text{مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{١٢ \times ٢٢٤٥ - ٦٦ \times ٣٤٠}{١٢ \times ٥٠٦ - ٦٦ \times ٦٦}$$

$$= \frac{٢٦٩٤٠ - ٢٢٤٤٠}{٦٠٧٢ - ٤٣٥٦} = \frac{٤٥٠٠}{١٧١٦} = ٢,٦٢٢$$

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\ \bar{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٣٤٠}{١٢} - ٢,٦٢٢ \times \frac{٦٦}{١٢}$$

$$= ٢٨,٣٣٣ - ١٤,٤٢٣ = ١٣,٩١$$

∴ معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هى:

ص = ٢,٦٢٢ س + ١٣,٩١

تحديد القيمة الاتجاهية $\hat{\text{ص}}$:

بالتعويض فى معادلة خط الاتجاه العام $\hat{\text{ص}}$ = ٢,٦٢٢ س + ١٣,٩١ عن س بالانحرافات من ٠ ، ١ ، ٢ ، .... إلى ١١ على التوالى نجد أن $\hat{\text{ص}}$ هى ١٣,٩١ ، ١٦,٥٣٢ ، ١٩,١٥٤ ، ..... إلى ٤٢,٧٥٢

إعداد الدليل الموسمي:

يتكون الدليل الموسمى من القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام (المعدلة) على أساس وضع رقم واحد متوسط أمام كل ربع (الوسط الحسابى البسيط للقيم الاتجاهية المخلصة) كما يلى:

القيم الاتجاهية / الربع	القيمة الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام			مجموع القيمة الاتجاهية	الدليل الموسمى ٪
	٢٠١٢ ٪	٢٠١٣ ٪	٢٠١٤ ٪		
الأول	٨٦,٢٦٩	٦١,٤٨	٧١,٦٦٢	٢١٩,٤١١	٧٣,١٣٧
الثانى	١٢٠,٩٧٧	١٢٩,٥٣٤	١٠٦,٦٤٤	٣٥٧,١٥٥	١١٩,٠٥٢
الثالث	٧٨,٣١٣	٨٤,٣٤	٨٢,٢٣٣	٢٤٤,٨٨٦	٨١,٦٢٩
الرابع	١٣٧,٧٦٦	١٢٣,٩٧٧	١١٦,٩٥٤	٣٧٨,٦٩٧	١٢٦,٢٣٢
المجموع					٤٠٠,٠٥

حيث مجموع الدليل الموسمى = ١٠٠٪ × عدد الفترات فى السنة

= ١٠٠٪ × ٤ = ٤٠٠٪

وفى حالة اختلاف المجموع الفعلى فى هذا المثال عن ٤٠٠٪ فيتم إجراء تعديل للقيم عن طريق معامل تصحيح أو تعديل وذلك بقسمة ٤٠٠٪ ÷ المجموع الفعلى أى أن:

$$\text{معامل تصحيح الدليل الموسمى} = \frac{٤٠٠\ ٪}{٤٠٠,٥\ ٪} = ٠,٩٩٩٨٧٥$$

الدليل الموسمى المعدل:

الربع	الدليل الموسمى المعدل ٪	الدليل الموسمى المعدل المطلق
الأول	٧٣,١٢٨ = ٠,٩٩٩٨٧٥ × ٧٣,١٣٧	٠,٧٣١٢٨
الثانى	١١٩,٠٣٧ = ٠,٩٩٩٨٧٥ × ١١٩,٠٥٢	١,١٩٠٣٧
الثالث	٨١,٦١٩ = ٠,٩٩٩٨٧٥ × ٨١,٦٢٩	٠,٨١٦١٩
الرابع	١٢٦,٢١٦ = ٠,٩٩٩٨٧٥ × ١٢٦,٢٣٢	١,٢٦٢١٦
المجموع	٤٠٠	٤

ويتحدد الدليل الموسمى المعدل المطلق = $\frac{\text{الدليل الموسمى المعدل}}{١٠٠}$

التنبؤ بقيمة الانتاج الربع سنوى المتوقع عام ٢٠١٥

الربع	الانتاج المتوقع عام ٢٠١٥ صَ = (٢,٦٢٢ س + ١٣,٩١) × الدليل الموسمى المعدل المطلق
الأول	صَ = (٢,٦٢٢ × ١٢ + ١٣,٩١) × ٠,٧٣١٢٨ = ٣٣,١٨١
الثانى	صَ = (٢,٦٢٢ × ١٣ + ١٣,٩١) × ١,١٩٠٣٧ =٥٧,١٣٣
الثالث	صَ = (٢,٦٢٢ × ١٤ + ١٣,٩١) × ٠,٨١٦١٩ = ٤١,٣١٤
الرابع	صَ = (٢,٦٢٢ × ١٥ + ١٣,٩١) × ١,٢٦٢١٦ = ٦٧,١٩٧

ملاحظة: تم التعويض عن س بالانحرافات بين الفترات الربع سنوية لعام ٢٠١٥ ونقطة الأصل وهى الربع الأول لعام ٢٠١٢ أى بالانحرافات ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥

تمارين على الباب الرابع

(١) البيان التالى يبين الأرباح السنوية الصافية بآلاف الجنيهات لإحدى الشركات:

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦
الأرباح	١٣٥,٢	١٤٨,٣	١٦٤,٩	٢٠١,٣	٢٤٥	٢٩٣	٣٥٠

المطلوب:

أ – حدد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

ب– حدد القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام

ج – تنبأ بصافى الأرباح عام ٢٠٠٧ ، عام ٢٠١٢

(٢) البيان التالى يمثل المبيعات السنوية الصافية بآلاف الجنيهات لإحدى الشركات:

السنة	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
المبيعات	٣٤٠	٣٦٥	٤٠٣	٤٤٦	٥٠٨	٥٧٠	٦٢٤	٦٩٠

المطلوب:

أ – حدد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

ب– حدد القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام

ج – تنبأ بالمبيعات السنوية المتوقعة عام ٢٠١١ ، عام ٢٠١٢

(٣) فيما يلى بيان بالواردات من المواد الخام لإحدى الصناعات الثقيلة بالمليون جنيه:

السنة	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
الواردات	١٢٥	١٤٠	١٦٨	١٥٠	١٧٥	١٨٥	٢٢٠	٢٠٠	٢٤٠

المطلوب:

أ – استخدم طريقة متوسطى نصفى السلسلة فى تحديد الاتجاه العام بيانياً

ب– استخدم طريقة المتوسطات المتحركة على أساس ٣ سنوات ثم على أساس ٤ سنوات ثم على أساس ٦ سنوات فى تحديد الاتجاه العام بيانياً

(٤) فيما يلى بيان بالمبيعات الربع سنوية بملايين الجنيهات لإحدى الشركات الصناعية خلال عامى ٢٠١٣ ، ٢٠١٤:

	٢٠١٣				٢٠١٤			
الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
المبيعات	٦٥	٩٥	٤٥	١٤٥	٨٥	١٢٠	٦٥	١٧٠

المطلوب:

أ – تحديد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

ب– تحديد القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام

ج– إعداد الدليل الموسمى

د – احسب المبيعات الربع سنوية المتوقعة خلال عام ٢٠١٦

الباب الخامس
الأرقام القياسية
Index Numbers

الرقم القياسى:

رقم يعبر عن التغير فى ظاهرة معينة بين فترتين مختلفتين أو بين مكانين مختلفين ، ويساعد الرقم القياسى متخذى القرار فى المشروعات المختلفة فى تحليل البيانات التاريخية الخاصة بالوظائف المختلفة داخل المشروع وفى رسم الخطط ووضع السياسات ، ومن ثم الرقابة والمتابعة للنتائج المختلفة داخل المشروع.

ويشمل الرقم القياسى بيانات تاريخية عن نشاط أو وظيفة أو سلعة معينة أو مجموعة متجانسة من السلع والخدمات تدخل فى تركيب الأرقام القياسية.

والرقم القياسى مقياس نسبى لا يتأثر بوحدات القياس ويتوقف على الاختيار المناسب للأساس سواء كان فترة زمنية أو مكان حيث يشترط أن يتميز الأساس بالاستقرار الاقتصادى والظروف الطبيعية ، وتعتبر الأرقام القياسية للأسعار والكميات هى الأكثر شيوعاً واستخداماً.

وستتم دراستنا فى هذا الباب بالتطبيق على الأسعار والكميات مع استخدام الرموز التالية:

الفترة / المتغير	فترة الأساس	فترة المقارنة
الأسعار	ع٠	ع١
الكميات	ك٠	ك١

أنواع الأرقام القياسية:

أولاً: المناسيب:

(١) المناسيب المستقلة البسيطة:

أ – منسوب السعر = $م_ع = \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$ Price Relative

ب– منسوب الكمية = $م_ك = \frac{ك_١}{ك_٠} \times ١٠٠$ Quantity Relative

جـ – منسوب القيمة = $م_ق = \frac{ق_١}{ق_٠} \times ١٠٠$ Value Relative

مثال:

السلعة	الأسعار		الكميات	
	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٥	٢٠٠٦
قمح	٨٠	١٦٠	٥	٨
قطن	٦٠	٩٠	٦	٩
ذرة	٤٠	٥٠	٤	٧

المطلوب:

حساب مناسيب الأسعار ومناسيب الكميات ومناسيب القيمة لكل سلعة مستقلة

الحل:

مناسيب الأسعار:

$$م_{ع_١} = \frac{١٦٠}{٨٠} \times ١٠٠ = ٢٠٠٪$$

$$م_{ع_٢} = \frac{٩٠}{٦٠} \times ١٠٠ = ١٥٠٪$$

$$م_{ع_٣} = \frac{٥٠}{٤٠} \times ١٠٠ = ١٢٥٪$$

مناسيب الكميات:

$$م_{ك_١} = \frac{٨}{٥} \times ١٠٠ = ١٦٠٪$$

$$م_{ك_٢} = \frac{٩}{٦} \times ١٠٠ = ١٥٠٪$$

$$م_{ك_٣} = \frac{٧}{٤} \times ١٠٠ = ١٧٥٪$$

مناسيب القيم:

$$م_{ق_١} = \frac{١٦٠ \times ٨}{٨٠ \times ٥} \times ١٠٠ = ٣٢٠٪$$

$م_{ق_٢} = \frac{٩٠ \times ٩}{٦٠ \times ٦} \times ١٠٠ = ٢٢٥٪$

$م_{ق_٣} = \frac{٥٠ \times ٧}{٤٠ \times ٤} \times ١٠٠ = ٢١٨,٧٥٪$

(٢) المناسيب التجميعية البسيطة:

أ – الوسط الحسابى البسيط للمناسيب:

الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار = $\frac{مجـ م_ع}{ن}$

الوسط الحسابى لمناسيب الكميات = $\frac{مجـ م_ك}{ن}$

الوسط الحسابى لمناسيب القيم = $\frac{مجـ م_ق}{ن}$

حل المثال السابق:

الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار = $\frac{٢٠٠+١٥٠+١٢٥}{٣} = ١٥٨,٣٪$

الوسط الحسابى لمناسيب الكميات = $\frac{١٦٠+١٥٠+١٧٥}{٣} = ١٦١,٧٪$

الوسط الحسابى لمناسيب القيم = $\frac{٣٢٠+٢٢٥+٢١٨.٧٥}{٣} = ٢٥٤,٥٨٪$

ب- الوسط الهندسى البسيط للمناسيب:

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار= $\sqrt[ن]{م_{ع_١} \times م_{ع_٢} \times ... \times م_{ع_ن}}$

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الكميات= $\sqrt[ن]{م_{ك_١} \times م_{ك_٢} \times ... \times م_{ك_ن}}$

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب القيم= $\sqrt[ن]{م_{ق_١} \times م_{ق_٢} \times ... \times م_{ق_ن}}$

ولإيجاد الجذر النونى لأياً من الأوساط الهندسية البسيطة السابقة يتم بالآلة الحاسبة وذلك برفع الجذر النونى كما يلى:

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار= $\left(م_{ع_١} \times م_{ع_٢} \times .. \times م_{ع_ن}\right)^{\frac{١}{ن}}$

ويتم إيــجاد المقدار السابق باستخدام الآلة الحاسبة وتســجيل الأُس بعد الضــغط على الزر x^y أو يتم حســاب الوســط الهــندسى البســيط باللوغاريتمات حيث:

$$لو\ هـ = \frac{١}{ن}\left(لو\ م_{ع_١} + لو\ م_{ع_٢} + .. + لو\ م_{ع_ن}\right)$$

ويتم إيجاد اللوغارتيمات عن طريق الجداول أو باستخدام الآلة الحاسبة بالضغط على الزر [LOG] ثم الناتج النهائى يسجل على الآلة ولإلغاء [لو] نضغط على الزر [10^x]

<u>حل المثال السابق:</u>

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار= $\sqrt[٣]{٢٠٠ \times ١٥٠ \times ١٢٥}$

لو هـ = $\frac{١}{٣}$ (لو ٢٠٠ + لو ١٥٠ + لو ١٢٥)

= $\frac{١}{٣}$ (٢,٣٠١٠٣ + ٢,١٧٦٠٩ + ٢,٠٩٦٩١)

= ٢,١٩١٣٤

∴ هـ = ١٥٥,٣٦٪

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الكميات= $\sqrt[٣]{١٦٠ \times ١٥٠ \times ١٧٥}$

لو هـ = $\frac{١}{٣}$ (لو ١٦٠ + لو ١٥٠ + لو ١٧٥)

= $\frac{١}{٣}$ (٢,٢٠٤١٢ + ٢,١٧٦٠٩ + ٢,٢٤٣٠٤)

= ٢,٢٠٧٧٥

∴ هـ = ١٦١,٣٤٣٪

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب القيم = $\sqrt[3]{٣٢٠ \times ٢٢٥ \times ٢٨١,٧٥}$

لو هـ = $\frac{١}{٣}$ (لو ٣٢٠ + لو ٢٢٥ + لو ٢٨١,٧٥)

= $\frac{١}{٣}$ (٢,٥٠٥١٥ + ٢,٣٥٢١٨ + ٢,٣٣٩٩٥)

= ٢,٣٩٩٠٩

∴ هـ = ٢٥٠,٦٦٤ ٪

<u>(٣) المناسيب التجميعية المرجحة:</u>

<u>أ – الوسط الحسابى المرجح للمناسيب:</u>

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار = $\frac{مجـ م_{ع} \times و}{مجـ و}$

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الكميات = $\frac{مجـ م_{ك} \times و}{مجـ و}$

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب القيم = $\frac{مجـ م_{ق} \times و}{مجـ و}$

حيث و عبارة عن الوزن أو الترجيح

<u>حل المثال السابق:</u>

احسب الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار بالكميات فى سنة الأساس

الحل:

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار بالكميات فى سنة الأساس ٢٠٠٥

$$= \frac{٢٠٠ \times ٥ + ١٥٠ \times ٦ + ١٢٥ \times ٤}{٥ + ٦ + ٤}$$

$$= \frac{١٠٠٠ + ٩٠٠ + ٥٠٠}{٥ + ٦ + ٤} = \frac{٢٤٠٠}{١٥}$$

$$= ١٦٠ \%$$

كما يمكن حساب الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة أو بالقيم فى سنة الأساس أو سنة المقارنة.

كما يمكن ترجيح مناسيب الأسعار بعدد العمال أو بساعات العمل وهكذا..

ب- الوسط الهندسى المرجح للمناسيب:

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الأسعار

$$= \sqrt[\text{مجو}]{\text{م}_{\text{ع}_{١}}^{\text{و}_{١}} \times \text{م}_{\text{ع}_{٢}}^{\text{و}_{٢}} \times \dots \times \text{م}_{\text{ع}_{\text{ن}}}^{\text{و}_{\text{ن}}}}$$

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الكميات

$$= \sqrt[\text{مجو}]{\text{م}_{\text{ك}_{١}}^{\text{و}_{١}} \times \text{م}_{\text{ك}_{٢}}^{\text{و}_{٢}} \times \dots \times \text{م}_{\text{ك}_{\text{ن}}}^{\text{و}_{\text{ن}}}}$$

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب القيم

$$= \sqrt[\text{مجو}]{م_{ق_1}^{و_1} \times م_{ق_2}^{و_2} \times \ldots \times م_{ق_ن}^{و_ن}}$$

ولإيجاد الجذر النونى لأياً من الأوساط الهندسية المرجحة السابقة يتم بالآلة الحاسبة وذلك برفع الجذر النونى وباستخدام اللوغاريتمات كما يلى:

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الأسعار:

$$= \frac{1}{\text{مجو}} \left(و_1 \, لو\, م_{ع_1} + و_2 \, لو\, م_{ع_2} + \cdots + و_ن \, لو\, م_{ع_ن} \right)$$

<u>حل المثال السابق:</u>

احسب الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار المرجح بكميات سنة الأساس ٢٠٠٥

<u>الحل:</u>

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار بالكميات فى سنة الأساس ٢٠٠٥

$$= \sqrt[\text{مجو}]{م_{ع_1}^{و_1} \times م_{ع_2}^{و_2} \times \ldots \times م_{ع_ن}^{و_ن}}$$

$$= \sqrt[١٥]{٢٠٠^{٥} \times ١٥٠^{٦} \times ١٢٥^{٤}}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{١}{١٥} \left(\text{٥ لو ٢٠٠ + ٦ لو ١٥٠ + ٤ لو ١٢٥}\right)$$

$$= \frac{١}{١٥} \left(٥ \times ٢,٣٠١٠٣ + ٦ \times ٢,١٧٦٠٩ + ٤ \times ٢,٠٩٦٩١\right)$$

$$= ٢,١٩٦٦٢$$

$$\therefore \text{هـ} = ١٥٧,٢٦١\%$$

ثانياً: الأرقام القياسية التجميعية:

(١) الرقم القياسي التجميعي البسيط:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\text{مج ع}_{١}}{\text{مج ع}_{٠}} \times ١٠٠$$

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = \frac{\text{مج ك}_{١}}{\text{مج ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيم} = \frac{\text{مجق}_{١}}{\text{مجق}_{٠}} \times ١٠٠$$

(٢) الأرقام القياسية التجميعية المرجحة:

سنقوم بالتطبيق على الأرقام القياسية التجميعية المرجحة للأسعار فقط ويستطيع الدارس التطبيق بالمثل على الكميات أو القيم.

أ – الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس:

$$\text{رقم لاسبير Laspeyer's Index} = \frac{\text{مج ع}_{١}\,\text{ك}_{٠}}{\text{مج ع}_{٠}\,\text{ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

ب– الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة:

$$\text{رقم باش Pasche Index} = \frac{\text{مج ع}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{مج ع}_{٠}\,\text{ك}_{١}} \times ١٠٠$$

ج – الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة (أو مجموع كميتى الأساس والمقارنة) أو المرجح بالوسط الهندسى:

رقمى مارشال و ادجورث Marshal – Edgeworth Index

- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة (أو بمجموع الكميتين) =

$$\frac{\text{مج ع}_{١}\left(\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١}\right)}{\text{مج ع}_{٠}\left(\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١}\right)} \times ١٠٠$$

- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الهندسى لكميتى الأساس والمقارنة =

$$\frac{\text{مج ع}_{١}\sqrt{\left(\text{ك}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)}}{\text{مج ع}_{٠}\sqrt{\left(\text{ك}_{٠}\,\text{ك}_{١}\right)}} \times ١٠٠$$

د – الوسط الحسابى البسيط لرقمى لاسبير و باش (رقم دوربش وبالى) :(Dorpish – Pally Index)

$$= \left\{ \frac{\text{مج ع}_{\text{١}}\ \text{ك}_{\text{٠}}}{\text{مج ع}_{\text{٠}}\ \text{ك}_{\text{٠}}} \times \text{١٠٠} + \frac{\text{مج ع}_{\text{١}}\ \text{ك}_{\text{١}}}{\text{مج ع}_{\text{٠}}\ \text{ك}_{\text{١}}} \times \text{١٠٠} \right\} \div \text{٢}$$

هـ – الوسط الهندسى البسيط لرقمى لاسبير و باش (رقم فيشر الأمثل) :(Irving Fisher Index – Ideal Index)

$$= \sqrt{\frac{\text{مج ع}_{\text{١}}\ \text{ك}_{\text{٠}}}{\text{مج ع}_{\text{٠}}\ \text{ك}_{\text{٠}}} \times \frac{\text{مج ع}_{\text{١}}\ \text{ك}_{\text{١}}}{\text{مج ع}_{\text{٠}}\ \text{ك}_{\text{١}}}} \times \text{١٠٠}$$

مثال:

فيما يلى أسعار وكميات مجموعة من السلع فى سنتى ٢٠١١ ، ٢٠١٢

الغلة	٢٠١١		٢٠١٢	
	أسعار	كميات	أسعار	كميات
قطن	٥٠	١٠	٧٥	١٢
قمح	٣٠	٨	٥٠	٩
ذرة	١٠	٥	١٦	٧

المطلوب:

حساب الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار والأرقام التجميعية المرجحة للأسعار.

الحل:

الغلة	$ع_{0}$	$ك_{0}$	$ع_{1}$	$ك_{1}$	$ع_{0}ك_{0}$	$ع_{0}ك_{1}$	$ع_{1}ك_{0}$	$ع_{1}ك_{1}$
قطن	٥٠	١٠	٧٥	١٢	٥٠٠	٦٠٠	٧٥٠	٩٠٠
قمح	٣٠	٨	٥٠	٩	٢٤٠	٢٧٠	٤٠٠	٤٥٠
ذرة	١٠	٥	١٦	٧	٥٠	٧٠	٨٠	١١٢
المجموع	٩٠	٢٣	١٤١	٢٨	٧٩٠	٩٤٠	١٢٣٠	١٤٦٢

الغلة	$ع_{0}(ك_{0}+ك_{1})$	$ع_{1}(ك_{0}+ك_{1})$	$ع_{0}\sqrt{ك_{0}ك_{1}}$	$ع_{1}\sqrt{ك_{0}ك_{1}}$
قطن	١١٠٠	١٦٥٠	٥٤٧,٧	٨٢١,٦
قمح	٥١٠	٨٥٠	٢٥٤,٦	٤٢٤,٣
ذرة	١٢٠	١٩٢	٥٩,٢	٩٤,٧
المجموع	١٧٣٠	٢٦٩٢	٨٦١,٥	١٣٤٠,٦

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار $= \frac{مجـ\ ع_{1}}{مجـ\ ع_{0}} \times ١٠٠$

$= \frac{١٤١}{٩٠} \times ١٠٠ = ١٥٦,٦٧\%$

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس

(رقم لاسبير):

$= \frac{مجـ\ ع_{1}ك_{0}}{مجـ\ ع_{0}ك_{0}} \times ١٠٠ = \frac{١٢٣٠}{٧٩٠} \times ١٠٠ = ١٥٥,٧٠\%$

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم پاش):

$$= \frac{\text{مجـ } ع_1 ك_1}{\text{مجـ } ع_. ك_1} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٤٦٢}{٩٤٠} \times ١٠٠ = ١٥٥,٥٣٪$$

٤- الرقم التجميعى للأسعار المرجح بمجموع كميتى الأساس والمقارنة (الوسط الحسابى البسيط – رقم مارشال و إدجورث)

$$= \frac{\text{مجـ } ع_1 (ك_. + ك_1)}{\text{مجـ } ع_. (ك_. + ك_1)} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٦٩٢}{١٧٣٠} \times ١٠٠ = ١٥٥,٦٠٪$$

٥- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الهندسى البسيط لكميتى الأساس والمقارنة (رقم مارشال و إدجورث)

$$= \frac{\text{مجـ } ع_1 \sqrt{ك_. ك_1}}{\text{مجـ } ع_. \sqrt{ك_. ك_1}} \times ١٠٠ = \frac{١٣٤٠.٥}{٨٦١.٤٤} \times ١٠٠ = ١٥٥,٦١٢٪$$

٦- الوسط الحسابى لرقمى لاسپير و پاش (رقم دورپش وپالى)

$$= \left\{ \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}} \times ١٠٠ + \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{١}} \times ١٠٠ \right\} \div ٢$$

$$= \frac{١٥٥.٥٣ + ١٥٥.٧٠}{٢} = ١٥٥,٦٢٪$$

٧- الوسط الهندسى البسيط لرقمى لاسپير و پاش (الرقم القياسى الأمثل لفيشر)

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ ك}_{١}}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١٥٥,٧٠ \times ١٥٥,٥٣} = ١٥٥,٦١٪$$

ثالثاً: الأرقام القياسية للسلسلة الزمنية:

إذا كان لدينا سلسلة زمنية لإحدى الظواهر الاقتصادية والمطلوب تحليل هذه السلسلة باستخدام الأرقام القياسية ، لذلك سنقوم أولاً بتحديد سنة الأساس المناسبة وفى هذا الصدد نكون بصدد نوعين من الأساس:

(١) الأساس الثابت:

بمقتضاه نختار سنة واحدة طبيعية خالية من أى ظروف اجتماعية أو سياسية أو اقتصادية أو غير عادية مثل (الحروب والثورات والزلازل والأوبئة ...) وتعتبر سنة الأساس ثابتة لجميع سنوات السلسلة وليس

شرطاً أن تكون هذه السنة هى أقدم سنوات السلسلة ، ومن ثم نقوم بحساب مناسيب مستقلة لقيمة الظاهرة فى أى سنة منسوبة لسنة الأساس المحددة مقدماً.

(٢) الأساس المتحرك:

بمقتضاه ننسب كل سنة إلى سابقتها كأساس متحرك وذلك لبيان التطور من سنة لأخرى أى أن الأساس يتغير باستمرار وليس هناك شروط لطبيعة هذا الأساس ، وتفيد هذه الطريقة فى الدراسة المقارنة بين السنوات الحديثة لذلك هى تعالج مشكلة القدم فى البيانات ، ويطلق على هذه الطريقة اسم مناسيب السلسلة.

مثال:

السلسلة الزمنية التالية تبين أسعار إحدى السلع على مدار السنوات من ٢٠٠٥ إلى ٢٠٠٩

السنوات	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩
الأسعار	١٢٠	١٥٠	١٩٠	٢٥٠	٣٢٠

المطلوب: حساب مناسيب الأسعار للسلسلة الزمنية السابقة على أساسين:

١- معتبراً سنة ٢٠٠٥ أساس ثابت لجميع السنوات

٢- الأساس المتحرك

الحل:

١- مناسيب الأسعار باعتبار سنة ٢٠٠٥ أساس ثابت لجميع السنوات:

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٥} = \frac{١٢٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٠٠\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٦} = \frac{١٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٢٥\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٧} = \frac{١٩٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٥٨,٣\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٨} = \frac{٢٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ٢٠٨,٣٣\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٩} = \frac{٣٢٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ٢٦٦,٦٧\%$$

ملاحظة: الرقم القياسى فى سنة الأساس يساوى دائماً ١٠٠٪

ونقارن باقى الأرقام القياسية بنسبة ١٠٠٪ لتحديد الزيادة أو النقص أو الثبات.

٢- الأساس المتحرك

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٦} = \frac{١٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٢٥\%$$

$$م_{٢٠٠٦/٢٠٠٧} = \frac{١٩٠}{١٥٠} \times ١٠٠ = ١٢٦,٦٧\%$$

$$م_{٢٠٠٧/٢٠٠٨} = \frac{٢٥٠}{١٩٠} \times ١٠٠ = ١٣١,٥٨\%$$

$$م_{٢٠٠٨/٢٠٠٩} = \frac{٣٢٠}{٢٥٠} \times ١٠٠ = ١٢٨\%$$

اختبارات الأرقام القياسية:

(١) اختبار الانعكاس فى الزمن (العكس الزمنى)

فى هذا الاختبار نستبدل سنة الأساس بسنة المقارنة أى نستبدل دليل المعاملات (٠) مع (١)

ومن خصائص الرقم القياسى الجديد هو الرقم الذى يتوافر فيه الشرط التالى:

الرقم القياسى × البديل الزمنى للرقم القياسى = ١

ونجد أن هذا الاختبار ينطبق على الرقمين التاليين فقط:

أ- الرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\dfrac{\text{مجـ ع}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}} \times \text{١٠٠}$

البديل الزمنى للرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\dfrac{\text{مجـ ع}_{0}}{\text{مجـ ع}_{1}} \times \text{١٠٠}$

∴ الرقم القياسى × بديله الزمنى = $\dfrac{\text{مجـ ع}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}} \times \dfrac{\text{مجـ ع}_{0}}{\text{مجـ ع}_{1}} = \text{١}$

ب- الرقم القياسى لفيشر = $\sqrt{\dfrac{\text{مجـ ع}_{1}\text{ك}_{0}}{\text{مجـ ع}_{0}\text{ك}_{0}} \times \dfrac{\text{مجـ ع}_{1}\text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}\text{ك}_{1}}} \times \text{١٠٠}$

$$\text{البديل الزمنى للرقم القياسى لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{1}} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{0}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{0}}} \times ١٠٠$$

∴ الرقم القياسى × بديله الزمنى

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{0}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{0}} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{1}} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{1}} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{0}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{0}}} = ١$$

<u>(٢) اختبار الانعكاس فى المعامل (العكس المعاملى)</u>

فى هذا الاختبار نستبدل الأسعار مع الكميات ، أى نستبدل المعاملات (ع) مع (ك)

ومن خصائص الرقم القياسى الجيد هو الرقم الذى يتوافر فيه الشرط التالى:

الرقم القياسى × البديل المعاملى للرقم القياسى = الرقم القياسى للقيمة وينطبق هذا الاختبار على رقم فيشر فقط حيث:

$$\text{الرقم القياسى لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{0}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{0}} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ع}_{1}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ}\ \text{ع}_{0}\,\text{ك}_{1}}} \times ١٠٠$$

$$\text{البديل المعاملى للرقم القياسى لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ \text{ك}_{1}\,\text{ع}_{0}}{\text{مجـ}\ \text{ك}_{0}\,\text{ع}_{0}} \times \frac{\text{مجـ}\ \text{ك}_{1}\,\text{ع}_{1}}{\text{مجـ}\ \text{ك}_{0}\,\text{ع}_{1}}} \times ١٠٠$$

∴ الرقم القياسى × بديله المعاملى

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{1}\text{ ك}_{0}}{\text{مجـ ع}_{0}\text{ ك}_{0}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{1}\text{ ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}\text{ ك}_{1}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{1}\text{ ع}_{0}}{\text{مجـ ك}_{0}\text{ ع}_{0}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{1}\text{ ع}_{1}}{\text{مجـ ك}_{0}\text{ ع}_{1}}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{مجـ ك}_{1}\text{ ع}_{1}}{\text{مجـ ك}_{0}\text{ ع}_{0}}\right)^{2}}$$

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{1}\text{ ع}_{1}}{\text{مجـ ك}_{0}\text{ ع}_{0}} = \frac{\text{مجـ ق}_{1}}{\text{مجـ ق}_{0}} \quad \text{(منسوب القيمة)}$$

لذلك اعتبر الرقم القياسى لفيشر هو الرقم الأمثل من بين الأرقام القياسية الأخرى لانطباق اختبارى الإنعكاس فى الزمن والإنعكاس فى المعامل على هذا الرقم.

<u>بعض الأرقام القياسية الهامة:</u>

تحرص الدول المختلفة على حساب وتسجيل بعض الأرقام القياسية الهامة وينوط بهذا الدور فى جمهورية مصر العربية الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، واستخدام هذه الأرقام فى دراسة بعض الظواهر الاقتصادية والاجتماعية العامة والتى تفيد الدولة والمؤسسات الاقتصادية المختلفة فى التخطيط والتحليل والمتابعة ومن أهم هذه الأرقام الرقم القياسى لنفقة المعيشة والرقم القياسى للأجور والرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود والرقم القياسى لأسعار التجزئة والرقم القياسى لأسعار الجملة والرقم القياسى للإنتاج الصناعى.

(١) الرقم القياسى لنفقة المعيشة: Cost of Living Index

ويطلق عليه أحياناً الرقم القياسى لأسعار المستهلكين ويتكون هذا الرقم من مجموعة من السلع والخدمات التى يحتاجها الأفراد للمعيشة خلال فترة معينة ويتم إعداد رقم للحضر وآخر للريف أو عدة أرقام تفصيلية على مستوى المناطق أو المحافظات المختلفة للدولة وتتغير تركيبة هذا الرقم كل فترة من الزمن ويحدد الرقم النمط الإستهلاكى للأسر المختلفة على شكل نسب مئوية أو أوزان لكل بند من بنود نفقة المعيشة مع عمل رقم قياسى تجميعى مرجح داخل كل بند لأسعار مجموعة السلع والخدمات التى يتكون منها ذلك البند وتكون هذه البنود سلة السلع والخدمات الاستهلاكية.

ويقيس الرقم القياسى لنفقة المعيشة التغير الذى يطرأ على نفقة معيشة الأفراد نتيجة التغير فى مستويات الأسعار ، ويستخدم هذا الرقم فى تحريك الأجور داخل كثير من الدول لتتلاءم مع التغير فى تكلفة المعيشة كما يستفاد منه فى قياس مرونة الطلب على السلع الاستهلاكية المختلفة.

(٢) الرقم القياسى للأجور: Wages Index

يتكون من الأجور النقدية والعينية للقطاعات والأنشطة المختلفة المنتظمة داخل الدولة وفقاً لأعداد العاملين وساعات العمل فى كل قطاع أو نشاط ، والرقم القياسى الناتج يحسب لكل قطاع وعلى مستوى الدولة ويطلق عليه الرقم القياسى للأجر النقدى وهو يختلف تماماً من الرقم القياسى للأجر الحقيقى والذى يقيس التغير الحقيقى فى مستويات المعيشة ويحسب كما يلى:

$$\text{الرقم القياسى للأجور الحقيقية} = \frac{\text{الرقم القياسى للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times ١٠٠$$

<u>مثال:</u>

البند / السنة	الأجور بالألف	نفقة المعيشة بالألف
٢٠٠٠	٢٤٠٠	١٣٢٠
٢٠١٠	٣٩٠٠	٢٦٤٠

المطلوب: قياس التغير فى الأجر الحقيقى

<u>الحل:</u>

$$\text{الرقم القياسى للأجور النقدية} = \frac{٣٩٠٠}{٢٤٠٠} \times ١٠٠ = ١٦٢,٥ \ \%$$

$$\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة} = \frac{٢٦٤٠}{١٣٢٠} \times ١٠٠ = ٢٠٠ \ \%$$

$$\text{الرقم القياسى للأجر الحقيقى} = \frac{\text{الرقم القياسى للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٦٢,٥}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ٨١,٢٥ \ \%$$

ويقارن الرقم القياسى للأجر الحقيقى بنسبة ١٠٠ ٪ ، إذا كان أقل يكون هناك نقص فى الدخل الحقيقى وبالتالى نقص فى مستوى المعيشة وإذا زاد عن ١٠٠٪ يكون هناك زيادة فى الدخل الحقيقى وبالتالى زيادة فى مستوى المعيشة.

وفى هذا المثال يعتبر مستوى المعيشة انخفض بنسبة ١٨,٧٥ ٪

(٣) الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود:

Purchasing Power of Money Index

هو مؤشر للقوة الشرائية الحقيقية للنقود وبديهى أنه يتأثر بالرقم القياسى للأسعار فكلما ارتفعت الأسعار مع ثبات الأجور كلما انخفضت القوة الشرائية للنقود والعكس صحيح ويتحدد الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود بمقلوب الرقم القياسى للأسعار.

$$\text{الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود} = \frac{١}{\text{الرقم القياسى للأسعار}} \times ١٠٠$$

فعلى سبيل المثال إذا كان الرقم القياسى للأسعار ٢٠٠ ٪ وبفرض ثبات الأجور فإن:

$$\text{الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود} = \frac{١}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ٥٠ ٪$$

أى أن القوة الشرائية للنقود انخفضت ٥٠٪

(٤) الرقم القياسى لأسعار الجملة:

Whole Sale Price Index

يقيس التغيرات التى تحدث فى أسعار السلع المتداولة فى سوق الجملة وذلك بعد تقسيمها لمجموعات متجانسة ويتم استخدام الوسط الحسابى المرجح أو الوسط الهندسى المرجح لمناسيب أسعار مجموعة السلع ويتم الترجيح عادة بأسعار عدد معين من السلع لكل مجموعة.

(٥) الرقم القياسى للإنتاج الصناعى:

Industrial Production Index

يقيس التغيرات التى تطرأ على أسعار الانتاج الصناعى لكل نوع من المنتجات الصناعية على حدة وللنشاط الصناعى ككل كما يحسب رقم قياسى لحجم أو كمية الانتاج لكل نوع على حدة وأفضل طريقة هى الوسط الحسابى المرجح أو الوسط الهندسى المرجح للمناسيب ويتم الترجيح بعدد العمال أو حجم الأموال المستثمرة فى كل صناعة.

وبالمثل يمكن إعداد أرقام قياسية للإنتاج الزراعى والبترول والتعدين وهذه الأرقام مؤشرات لدرجة النمو الاقتصادى للدولة.

تمارين على الباب الخامس

(١) فيما يلى بيان بأسعار سلعة معينة خلال الأعوام من ٢٠٠٦ : ٢٠١٣

العام	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
السعر	٢٠,٤	٢٢,٥	٢٦	٢٩,٣	٣٥	٤٠,٢	٥٣,٦	٧٢,٩

المطلوب:

- حساب الأرقام القياسية لمناسيب الأسعار معتبراً عام ٢٠٠٦ أساس ثابت
- حساب الأرقام القياسية لمناسيب الأسعار على الأساس المتحرك

(٢) فيما يلى بيان بأسعار وكميات مجموعة من السلع الزراعية خلال عامى ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠

السلعة	الأسعار		الكميات	
	٢٠٠٥	٢٠١٠	٢٠٠٥	٢٠١٠
قطن	٦٥	٨٣	١٢٥	١٦٤
قمح	٢٨	٤٥	١١٠	١٣٥
ذرة	٣٥	٥٣	١٦٠	١٩٠
قصب سكر	١٢	١٨	٥٥	٧٥
شعير	٩	١٧	٢٥	٤٠

المطلوب:

أ – حساب مناسيب الأسعار والوسط الحسابى البسيط والوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار ثم الوسط الحسابى المرجح والوسط الهندسى المرجح للأسعار بكميات سنة الأساس

ب- الرقم التجميعى البسيط للأسعار

جـ - الرقم التجميعى البسيط للأسعار المرجح بكميات الأساس والمرجح بكميات المقارنة

د - الرقم القياسى الأمثل لفيشر

هـ - الرقم التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة والرقم المرجح بالوسط الهندسى لكميتى الأساس والمقارنة

(٣) فيما يلى بيان بمتوسط الأجر الشهرى وعدد العاملين لمجموعة من الشركات خلال عامى ٢٠٠٦ ، ٢٠٠٩

الشركة	٢٠٠٦		٢٠٠٩	
	الأجر	عدد العاملين	الأجر	عدد العاملين
أ	١٥٠	١٥	٢١٠	١٨
ب	٣٠٠	٨	٤٥٠	١٢
جـ	٢١٠	٢٥	٢٨٠	٢٥
د	١٨٠	١٢	٢٥٠	١٥
هـ	٤٠٠	٧	٥٥٠	١٠

المطلوب:

أ - حساب مناسيب الأجر ومناسيب عدد العمال ثم الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأجور بعدد عمال سنة الأساس

ب- حساب الرقم القياسى الأمثل للأجور (رقم فيشر)

جـ -حساب الوسط الحسابى لرقمى لاسبير و باش

د – إذا كان الرقم القياسى لنفقة المعيشة لسنة ٢٠٠٩ بالنسبة لسنة ٢٠٠٦ يبلغ ١٤٠٪ احسب الرقم القياسى للأجر الحقيقى باستخدام الرقم القياسى الأمثل لفيشر

(٤) فيما يلى سلسلة زمنية للأرقام القياسية للمواد الخام لإحدى الصناعات خلال السنوات من ٢٠٠٤ : ٢٠١٠

السنوات	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
الأرقام القياسية للمواد الخام	١٠٠	١٢٠	١٣٥	١٥٢	١٧٥	١٩٤	٢١٥

المطلوب:

- انقل الأساس الثابت من عام ٢٠٠٤ إلى عام ٢٠٠٦
- احسب الأرقام القياسية على الأساس المتحرك ثم احسب الوسط الحسابى البسيط لمناسيب السلسلة

(٥) فيما يلى بيان بأنواع الحاسبات والكميات المباعة منها فى عامى ٢٠٠٤ ، ٢٠١٤

أنواع الحاسبات	أ	ب	جـ	د	هـ
الكميات المباعة ٢٠٠٤	١١٠	٨٥	٦٠	٢٠٠	١٧٥
الكميات المباعة ٢٠١٤	١٧٥	١٥٠	١١٠	٣٠٠	٤٥٠
سعر الحاسب	٣٠٠٠	٢٥٠٠	٤٦٠٠	٥٠٠٠	٢١٠٠

المطلوب:

أ – حساب الرقم القياسى التجميعى المرجح للكميات المباعة بالأسعار

ب– حساب الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الكميات المباعة

جـ – حساب الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الكميات المباعة

(٦) فيما يلى الأرقام القياسية لنفقة المعيشة والأجور باعتبار سنة ٢٠٠٠ أساس ثابت

السنة	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
الرقم القياسى لنفقة المعيشة	٢١٠	٢٣٥	٢٨٠	٣١٠	٣٨٠	٤٥٠
الرقم القياسى للأجور	١٢٠	١٤٠	١٧٥	٢٠٠	٢٥٠	٣٢٠

المطلوب:

المقارنة بين مستويات المعيشة خلال السنوات السابقة

(٧) فيما يلى بيان بأسعار وكميات مجموعة من المعادن خلال عامى ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠

المعادن	الأسعار		الكميات	
	٢٠٠٥	٢٠١٠	٢٠٠٥	٢٠١٠
حديد	٨٠	١٠٠	٨٥	١١٥
نحاس	٦٥	٧٥	٥٠	٦٥
رصاص	١٥	٢٣	١٠	١٢
قصدير	١٨٠	٢٧٠	٥	٨
صفيح	٨	١٣	١٥٠	٢١٠

المطلوب:

أ – الأرقام القياسية التجميعية البسيطة للأسعار وللكميات معاً

ب– الرقم القياسى الأمثل للأسعار واستخدامه فى حساب الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود

الباب السادس
التوزيعات الاحتمالية
Probability Distributions

الفصل الأول: القيمة المتوقعة والتباين للتوزيعات الاحتمالية

الفصل الثانى: التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

توزيع ذو الحدين – توزيع بواسون

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

التوزيع الطبيعى

الأهداف السلوكية:

بعد دراسة مواضيع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على:

١- كيفية العرض البيانى لدالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعية باختلاف نوع المتغير سواء كانت المتغيرات منفصلة أو متصلة.

٢- كيفية حساب القيمة المتوقعة والتباين.

٣- التعرف على أكثر التوزيعات الاحتمالية المنفصلة شيوعاً: توزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون وكيفية حسابهما.

٤- التعرف على التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعى والتوزيع الطبيعى المعيارى.

٥- كيفية استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذو الحدين وكتقريب لتوزيع بواسون.

العناصر:

[١] الفصل الأول: القيمة المتوقعة والتباين للتوزيعات الاحتمالية:

١- بعض التعريفات الهامة:

١/١ الدالة الاحتمالية.

٢/١ المتغير العشوائى.

٣/١ دالة كثافة الاحتمال.

٤/١ دالة الاحتمالات التجميعية.

٢- العرض البيانى لدالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعية

١/٢ المتغيرات المنفصلة.

٢/٢ المتغيرات المتصلة أو المستمرة.

٣- القيمة المتوقعة والتباين للمتغيرات العشوائية.

١/٣ القيمة المتوقعة.

٢/٣ التباين.

[٢] الفصل الثانى: التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

توزيع ذو الحدين – توزيع بواسون.

١- توزيع ذو الحدين.

٢- توزيع بواسون.

[٣] الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

١- التوزيع الطبيعى.

٢- التوزيع المعيارى.

٣- استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذو الحدين.

٤- استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

[٤] الخلاصة.

[٥] تمارين على الباب السادس.

الفصل الأول

القيمة المتوقعة والتباين للمتغيرات العشوائية

Expected value and variance for prob. distributions

هناك بعض التعريفات الهامة التى يجب الإلمام بها قبل تناول التوزيعات الاحتمالية من أهمها:

الدالة الاحتمالية Probability Function

الدالة بصفة عامة عبارة عن علاقة رياضية تربط بين متغيرين أحدهما مستقل (س) والآخر تابع له (ص)، حيث توجد لكل قيمة من قيم المتغير المستقل (س) قيمة (أو قيم) محددة للمتغير التابع (ص)، ونشير إلى هذه العلاقة بأن ص دالة فى س أى ص = د(س). وهذا يعنى أن التغير فى ص يكون مرتبطاً ومتوقفاً على التغير الذى يحدث فى س.

والدالة الاحتمالية هى علاقة رياضية تربط بين قيم المتغير العشوائى (متغير مستقل) واحتمالات حدوث هذه القيم (متغير تابع) ولذلك لابد من تناول مفهوم المتغير العشوائى.

المتغير العشوائى: Random Variable

عند إجراء تجربة ما بصورة متكررة وتحت نفس الظروف فإننا نحصل على نتائج مختلفة، مثل هذه المحاولات تسمى التجربة العشوائية، ويلاحظ أن النتائج التى نحصل عليها تعتمد فقط على الصدفة أو العشوائية Randomness وقد تكون فى صورة عددية أو وصفية. ومن

ثم فإن المتغير العشوائى هو المتغير الذى يأخذ قيماً عددية حقيقية أو وصفية متغيرة فى المحاولات المختلفة لتجربة عشوائية خاضعة للصدفة.

وقد سبق أن أشرنا إلى أن المتغيرات تنقسم إلى متغيرات متقطعة أو منفصلة Discrete Variables ومتغيرات متصلة أو مستمرة Continuous Variables.

دالة كثافة الاحتمال Probability Denisty function

وهى الدالة أو العلاقة التى تربط بين القيم المختلفة للمتغير العشوائى (س) واحتمالات تحقق هذه القيم ح(س)، وهذه العلاقة يمكن أن تكون فى صورة جدول أو فى صورة دالة رياضية.

مثال (١): إذا تصورنا تجربة عشوائية تتمثل فى إلقاء زهرتى نرد على سطح أملس ورصد مجموع القراءتين على وجهى الزهرتين، فإننا سنحصل على المجاميع التالية: ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٧ أو ٨ أو ٩ أو ١٠، ١١ أو ١٢، وهذه القيم تمثل قيم المتغير العشوائى (س)، وكل قيمة لها عدد من حالات التكرار أو فرص الحدوث ومن خلال هذه القيم وبمعرفة المجموع الكلى لحالات التكرار = ٦ × ٦ = ٣٦ حالة، نحصل على الاحتمالات لكل قيمة من قيم المتغير العشوائى ح(س) وهو ما يكون دالة كثافة الاحتمال:

قيمة المتغير العشوائى	التكرار	الاحتمال ح(س)	الاحتمالات التجميعية مجـــ ح(س)
٢	١	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$
٣	٢	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$
٤	٣	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$
٥	٤	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$
٦	٥	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١٥}{٣٦}$
٧	٦	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٢١}{٣٦}$
٨	٥	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٢٦}{٣٦}$
٩	٤	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣٠}{٣٦}$
١٠	٣	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٣٣}{٣٦}$
١١	٢	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣٥}{٣٦}$
١٢	١	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٣٦}{٣٦} = ١$
المجموع	٣٦	$\frac{٣٦}{٣٦} = ١$	

ونستنتج مما سبق أن ح(س) $\leq$ صفر وأن مجـ ح(س) = ١

وهما شرطان أساسيان لأية دالة كثافة احتمال لأى متغير متصل أو منفصل.

دالة الاحتمالات التجميعية

Cumulative probabilities function

وهى دالة تراكمية أو تجميعية لدالة كثافة الاحتمال، مثل تكوين الجدول المتجمع. فإذا كانت (س) متغير عشوائى تأخذ القيمة $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$، والاحتمالات المناظرة لها ح($س_١$)، ح($س_٢$)، ح($س_٣$)،...، ح($س_ن$) فإن احتمال أن تكون (س) أقل من أو تساوى قيمة معينة ولتكن $س_ر$ = $\sum_{س_١}^{س_ر}$ ح(س) ، كما يتضح من العمود الأخير بالجدول السابق.

العرض البيانى لدالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعية:

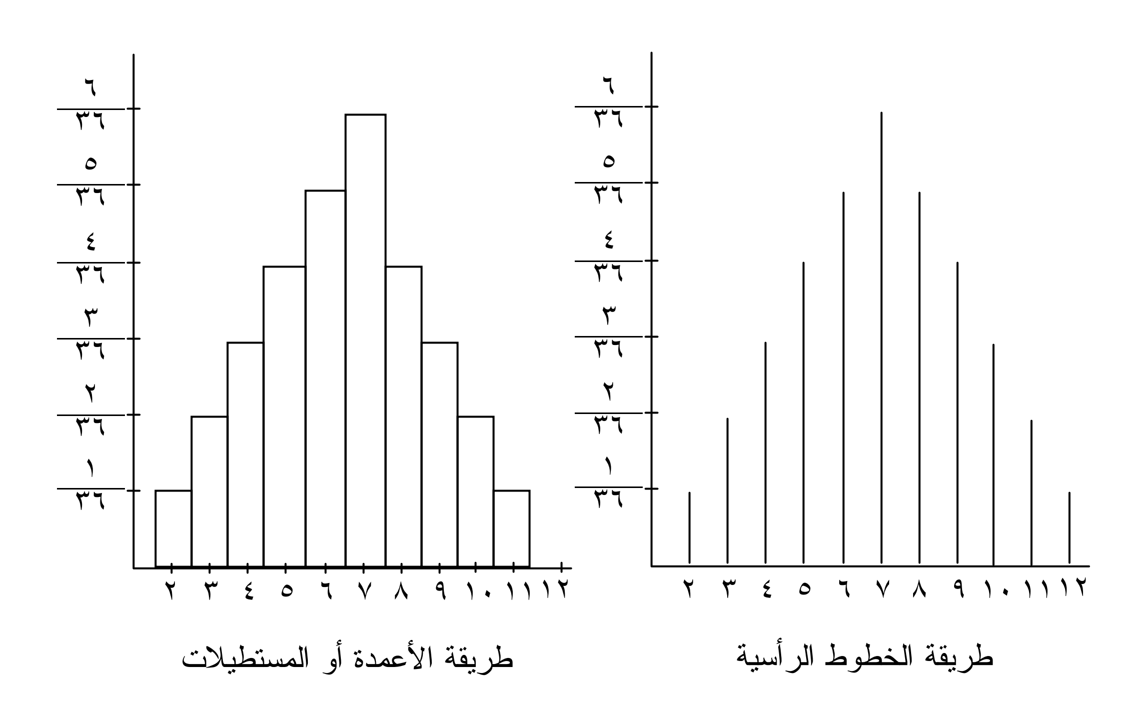
يختلف عرض كل من دالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعية باختلاف نوع المتغير:

١- المتغيرات المنفصلة:

يتم عرض دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات المنفصلة فى شكل خطوط رأسية أو أعمدة متلاصقة حيث تمثل قيم المتغير (س) على المحور الأفقى والاحتمالات المناظرة لها ح(س) على المحور الرأسى بحيث يكون مجموع أطوال هذه الخطوط أو ارتفاعات هذه الأعمدة = ١.

مع ملاحظة أنه فى حالة التمثيل بالأعمدة (أو المستطيلات) فإن قيم (س) تعبر عن مراكز هذه الأعمدة كما يتضح من الشكلين التاليين:

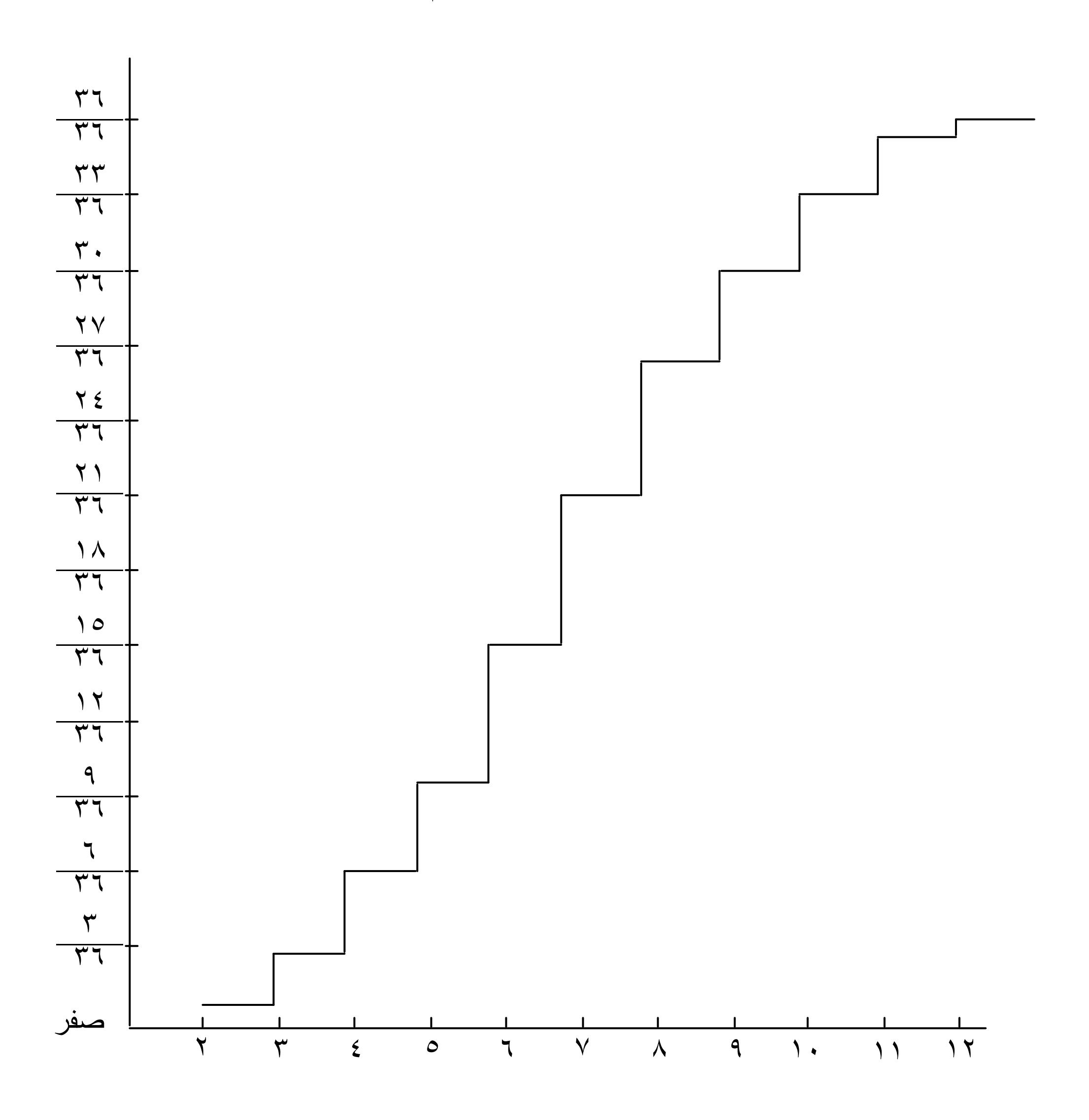
دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات المنفصلة



طريقة الخطوط الرأسية

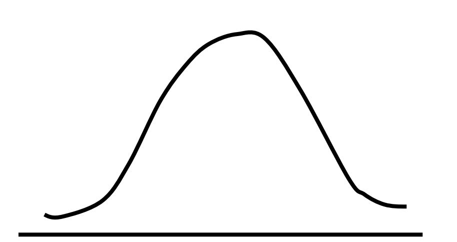
طريقة الأعمدة أو المستطيلات

أما دالة الاحتمالات التجميعية للمتغيرات المنفصلة فيتم تمثيلها فى الصورة التالية والتى تشبه درجات السلم.

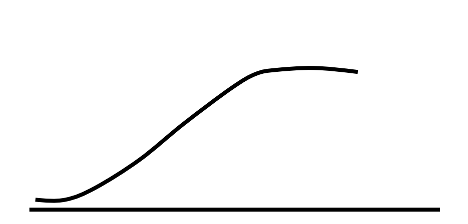


٢- المتغيرات المتصلة أو المستمرة:

يتم تمثيل دالة كثافة الاحتمال لهذه المتغيرات فى صورة منحنى، لأن أى قيمتين صحيحتين للمتغير المستمر يقع بينهما العديد من القيم التى لو تم تمثيلها بنقط لجاءت فى صورة نقط متلاصقة أى فى شكل خط منحنى، وبالمثل فإن دالة الاحتمالات التجميعية لتلك المتغيرات يتم تمثيلها فى شكل منحنى متجمع صاعد كما يتضح من الشكلين التاليين:



دالة كثافة الاحتمال للمتغيرات المتصلة



دالة الاحتمالات التجميعية للمتغيرات المتصلة

القيمة المتوقعة والتباين للمتغيرات العشوائية

Expected value and variance

عند دراسة أى مجتمع لابد من الوصول إلى بعض الخصائص الإحصائية لهذا المجتمع وخاصة القيمة المتوقعة وهى تحديد القيمة المركزية لهذا المجتمع (الوسط الحسابى)، وكذلك التباين وهو مقياس لتشتت مفردات المجتمع.

القيمة المتوقعة Expected value:

من المعتاد أن نشير إلى الوسط الحسابى للمتغير العشوائى (μ) بالقيمة المتوقعة [ت(س)] وهى عبارة عن مجموع قيم المتغير العشوائى (س) مرجحة (مضروبة فى) بالاحتمالات المناظرة لها ح(س) أى أن:

μ أو ت(س) = مجـ س. ح(س)   حيث س قيم متغير عشوائى متقطع

μ أو ت(س) = ∫ س . ح(س). دس حيث س قيم متغير عشوائى متصل

التباين Variance:

تباين المتغير العشوائى (س) عبارة عن مجموع مربعات انحرافات قيم هذا المتغير عن قيمته المتوقعة (μ) مرجحاً بالاحتمالات المناظرة لكل انحراف فإذا كان (س) متغير عشوائى متقطع فإن التباين يصبح فى الصورة التالية:

δ^2 = مجـ (س − μ)^2 . ح(س)

δ^2 = مجـ س^2. ح(س) − ٢(مجـ س . ح(س))^2+(مجـ س. ح(س))^2

δ^2 = مجـ س^2 . ح(س) − (مجـ س. ح(س))^2

δ^2 = ت (س^2) − [ت(س)]^2

أما إذا كان (س) متغير عشوائى متصل فإن التباين يكون فى صورة:

δ^2 = ∫ [(س − μ)^2 . ح(س)] . دس

مثال (٢): من بيانات المثال السابق احسب القيمة المتوقعة والتباين لمجموع النقط التى تظهر على السطح العلوى للزهرتين:

س	ح(س)	س.ح(س)	$س^2$. ح(س)
٢	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$
٣	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٨}{٣٦}$
٤	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{١٢}{٣٦}$	$\frac{٤٨}{٣٦}$
٥	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢٠}{٣٦}$	$\frac{١٠٠}{٣٦}$
٦	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٣٠}{٣٦}$	$\frac{١٨٠}{٣٦}$
٧	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤٢}{٣٦}$	$\frac{٢٩٤}{٣٦}$
٨	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤٠}{٣٦}$	$\frac{٣٢٠}{٣٦}$
٩	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣٦}{٣٦}$	$\frac{٣٢٤}{٣٦}$
١٠	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٣٠}{٣٦}$	$\frac{٣٠٠}{٣٦}$
١١	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٢٢}{٣٦}$	$\frac{٢٤٢}{٣٦}$
١٢	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{١٢}{٣٦}$	$\frac{١٤٤}{٣٦}$
المجموع	١	$\frac{٢٥٢}{٣٦}$	$\frac{١٩٧٤}{٣٦}$

القيمة المتوقعة μ أو ت(س) = مجــ س. ح س = $\frac{٢٥٢}{٣٦}$ = ٧ نقط

التباين δ^2 = مجــ $س^2$. ح س – $[مجــ س . ح(س)]^2$

= $\frac{١٩٧٤}{٣٦} - \left(\frac{٢٥٢}{٣٦}\right)^2$

= ٥٤,٨٣ – ٤٩ = ٥,٨٣ نقطة

مثال (٣): البيانات التالية تمثل المبيعات اليومية بالجنية من إحدى السلع لأحد محلات التجزئة خلال شهر نوفمبر من العام الماضى:

٥٠ ٥٣ ٥١ ٥٥ ٥٦ ٥٤ ٥٣ ٥١ ٥٠ ٥٨

٥٩ ٥١ ٥٣ ٥٢ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٨ ٦٠ ٥١

٥٢ ٥٣ ٥٧ ٥٨ ٥٦ ٥٤ ٥٥ ٥٣ ٥١ ٥٨

المطلوب:

١- إعداد التوزيع الاحتمالى للبيانات السابقة.

٢- حساب القيمة المتوقعة والتباين للمبيعات اليومية من هذه السلعة.

الحـــــل

س	التفريغ	ك	ح(س)	س.ح(س)	س^2. ح(س)
٥٠	//	٢	٠,٠٦٧	٣,٣٥	١٦٧,٥
٥١	////̸	٥	٠,١٦٧	٨,٥١٧	٤٣٤,٣٦٧
٥٢	//	٢	٠,٠٦٧	٣,٤٨٤	١٨١,١٦٨
٥٣	////	٥	٠,١٦٧	٨,٨٥١	٤٦٩,١٠٣
٥٤	///	٣	٠,١	٥,٤	٢٩١,٦
٥٥	///	٣	٠,١	٥,٥	٣٠٢,٥
٥٦	///	٣	٠,١	٥,٦	٣١٣,٦
٥٧	/	١	٠,٠٣٣	١,٨٨١	١٠٧,٢١٧
٥٨	////	٤	٠,١٣٣	٧,٧١٤	٤٤٧,٤١٢
٥٩	/	١	٠,٠٣٣	١,٩٤٧	١١٤,٨٧٣
٦٠	/	١	٠,٠٣٣	١,٩٨٠	١١٨,٨
المجموع		٣٠	١	٥٤,٢٢٤	٢٩٤٨,١٤

القيمة المتوقعة μ = مجـــ س. ح س = ٥٤,٢٢٤ جنيه

التباين δ^2 = مجـــ س^2. ح(س) – [مجـــ س. ح(س)]^2

= ٢٩٤٨,١٤ – (٥٤,٢٢٤)^2

= ٢٩٤٨,١٤ – ٢٩٤٠,٢٤ = ٧,٩ جنيه

الفصل الثانى

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

Discrete Probability Distributions

توزيع ذو الحدين – توزيع بواسون

Binomial dis. & Poisson dis.

تتعدد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة بتعدد الدوال الاحتمالية التى تأخذها المتغيرات المنفصلة إلا أن أكثرها شيوعاً توزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون.

توزيع ذو الحدين Binomial distribution

هناك الكثير من الظواهر التى يتم قياسها أو تصنيفها وصفياً وليس كمياً، فعند فحص إنتاج أحد المصانع فإن نتيجة الفحص لأى وحدة منتجة تكون إما سليمة أو معيبة، وعند إلقاء قطعة النقود على سطح أملس فإن السطح العلوى لها يكون إما صورة أو كتابة، وكذلك عند تقسيم بعض الطلاب حسب نتيجة الامتحان فى مادة معينة فإما أن يكونوا ناجحين أو راسبين.

ومثل هذه الظواهر والتى تكون نتيجة أى تجربة نقوم بها حالة من حالتين فقط فإنه يقال بأنها تتبع توزيع ذو الحدين، وهذا التوزيع يقوم على عدة أسس هى:

١- أن هناك تجربة عشوائية تتم (ن) من المرات بهدف الحصول على حدث معين.

٢- أن المرات أو المحاولات التى تتم بها التجربة مستقلة عن بعضها.

٣- أن كل محاولة نقوم بها تكون نتيجتها إما نجاح باحتمال (ل) أو فشل باحتمال (١ – ل).

٤- أن احتمال النجاح (ل) ثابت فى جميع المحاولات المستقلة، وبالتالى احتمال الفشل (١– ل) ثابت أيضاً فى جميع المحاولات.

وبالتالى يمكن وضع الصياغة التالية والتى تعبر عن الأسس التى يقوم عليها توزيع ذو الحدين:

إذا تكررت تجربة عشوائية (ن) من المرات بهدف الحصول على حدث معين وكان احتمال تحقق هذا الحدث فى أى محاولة (ل) واحتمال عدم تحققه (١– ل) وكانت كل المحاولات مستقلة عن بعضها فإن:

١- احتمال تحقق هذا الحدث (ن) من المرات (فى كل المحاولات)

= ل × ل × ل × ... × ل (ن من المرات)

$= ل^{ن}$

٢- احتمال عدم تحقق هذا الحدث (ن) من المرات (فى كل المحاولات)

= (١ – ل) (١ – ل) (١ – ل) ...... (ن من المرات)

$= (١ - ل)^{ن}$

٣- احتمال أن يتحقق هذا الحدث (س) من المرات من بين (ن) من المرات

$= ح_{س}$ حيث $ح_{س} = {}^{ن}ق_{س} (ل)^{س} (١ - ل)^{ن-س}$

وهذه الدالة تمثل الصورة الرياضية لدالة كثافة الاحتمال لتوزيع ذو الحدين.

ودالة الاحتمالات التجميعية لتوزيع ذو الحدين تأتى فى صورة:

$$\text{مجـ}\ \text{ح}_{\text{س}} = \sum_{\text{ب}}^{\text{ن}} {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}}\ (\text{ل})^{\text{س}}\ (١ - \text{ل})^{\text{ن} - \text{س}}$$

ويلاحظ أن دالة توزيع ذو الحدين تعتمد على ن، ل أى على حجم العينة (عدد مرات التجربة) والاحتمال، وبالتالى فإنه من خلال معرفتنا لقيمة ن، ل يمكن معرفة خصائص التوزيع أو معالمه والتى تتمثل فى القيمة المتوقعة (الوسط الحسابى) والتباين.

مثال (١): إذا كانت نسبة الإنتاج السليم فى أحد المصانع ٠,٩ فإذا سحبنا عينة من ٥ وحدات من إنتاج المصنع احسب ما يلى:

١- احتمال أن نجد بينها وحدتين فقط سليمة.

٢- احتمال أن نجد بينها ٣ وحدات على الأقل سليمة.

٣- احتمال أن نجد بينها أقل من وحدتين سليمة.

٤- القيمة المتوقعة لعدد الوحدات السليمة فى العينة.

٥- الانحراف المعيارى لعدد الوحدات السليمة فى العينة.

الحــــــل

ن = ٥   ل = ٠,٩   ١ - ل = ٠,١

١- احتمال وجود وحدتين سليمة = $\text{ح}_{(٢)}$:

$$\text{ح}_{(٢)} = {}^{٥}\text{ق}_{٢}\ (٠,٩)^{٢}\ (٠,١)^{٣} = ١٠ \times ٠,٨١ \times ٠,٠٠١ = ٠,٠٠٨١$$

٢- احتمال وجود ٣ وحدات على الأقل سليمة = ٣ سليمة أو ٤ سليمة أو ٥ سليمة:

$$\text{ح}_{(٣)} + \text{ح}_{(٤)} + \text{ح}_{(٥)} = {}^{٥}\text{ق}_{٣}\ (٠,٩)^{٣}\ (٠,١)^{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}\ (٠,٩)^{٤}\ (٠,١)^{١} + {}^{٥}\text{ق}_{٥}\ (٠,٩)^{٥}\ (٠,١)^{٠}$$

$$= ١٠ \times ٠,٧٢٩ \times ٠,٠١ + ٥ \times ٠,٦٥٦١ \times ٠,١ + ١ \times ٠,٥٩٠٤٩ \times ١$$

= ٠,٠٧٢٩٠ + ٠,٣٢٨٠٥ + ٠,٥٩٠٤٩ = ٠,٩٩١٥٤

٣- احتمال وجود أقل من وحدتين سليمة = وحدة سليمة أو صفر سليمة:

ح$_{(١)}$ + ح$_{(٠)}$ = ^{٥}ق$_{١}$ (٠,٩)^{١} (٠,١)^{٤} + ^{٥}ق$_{٠}$ (٠,٩)^{٠} (٠,١)^{٥}

= ٥ × ٠,٩ × ٠,٠٠٠١ + ١ × ٠,٠٠٠٠١

= ٠,٠٠٠٤٥ + ٠,٠٠٠٠١ = ٠,٠٠٠٤٦

<u>ملحوظة:</u>

ح$_{(٠)}$ + ح$_{(١)}$ + ح$_{(٢)}$ + ح$_{(٣)}$ + ح$_{(٤)}$ + ح$_{(٥)}$ = ١

٤- القيمة المتوقعة لعدد الوحدات السليمة فى العينة: μ = ن × ل

μ = ٥ × ٠,٩ = ٤,٥ وحدة

٥- الانحراف المعيارى لعدد الوحدات السليمة فى العينة:

δ = $\sqrt{\text{ن × ل (١ − ل)}}$

= $\sqrt{\text{٥ × ٠,٩ × ٠,١}}$ = $\sqrt{\text{٠,٤٥}}$ = ٠,٦٧ وحدة

أى أنه إذا سحبنا عدداً كبيراً من العينات من إنتاج هذا المصنع وكل عينة مكونة من ٥ وحدات فإننا سنجد فى المتوسط ٤,٥ وحدة سليمة بانحراف معيارى ٠,٦٧ وحدة فى كل عينة.

ويلاحظ سهولة حساب القيمة المتوقعة (الوسط الحسابى) والانحراف المعيارى باستخدام خصائص توزيع ذو الحدين قياساً بما سبق دراسته من طرق لحسابها.

مثال (٢): من بيانات المثال السابق احسب ما يلى:

١- احتمال أن نجد أن ٣ وحدات معيبة فى العينة.

٢- احتمال أن نجد وحدة على الأكثر معيبة فى العينة.

٣- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة.

الحـــــل

لاحظ أن ل = ٠,٩ تشير إلى احتمال إنتاج وحدة سليمة ومعنى ذلك أن (س) تعبر عن عدد الوحدات السليمة فى العينة كما أشرنا من قبل وبالتالى فإن معنى وجود ٣ وحدات معيبة فى العينة أن هناك وحدتين سليمتين أى أن:

١- احتمال أن نجد ٣ وحدات معيبة = احتمال أن نجد وحدتين سليمتين= ح$_{(٢)}$

ح$_{(٢)}$ = ^{٥}ق$_{٢}$ $(٠,٩)^{٢}$ $(٠,١)^{٣}$ = ١٠ × ٠,٨١ × ٠,٠٠١ = ٠,٠٠٨١

كما يمكن أن نعتبر أن س = ٣ على أساس أن ل = ٠,١، (١ – ل) = ٠,٩ وبالتالى يحسب احتمال أن نجد ٣ وحدات معيبة كما يلى:

ح$_{(٣)}$ = ^{٥}ق$_{٣}$ $(٠,١)^{٣}$ $(٠,٩)^{٢}$ = ١٠ × ٠,٠٠١ × ٠,٨١ = ٠,٠٠٨١

ونحصل على نفس الناتج.

٢- احتمال أن نجد وحدة على الأكثر معيبة = وحدة معيبة أو صفر معيبة

= ٤ سليمة أو ٥ سليمة = ح$_{(٤)}$ + ح$_{(٥)}$

ح$_{(٤)}$ + ح$_{(٥)}$ = ^{٥}ق$_{٤}$ $(٠,٩)^{٤}$ $(٠,١)^{١}$ + ^{٥}ق$_{٥}$ $(٠,٩)^{٥}$ $(٠,١)^{٠}$

= ٠,٣٢٨٠٥ + ٠,٥٩٠٤٩ = ٠,٩١٨٥٤

٣- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة:

القيمة المتوقعة μ = ن × ل حيث ل = ٠,١

= ٥ × ٠,١ = ٠,٥ وحدة

التباين $\delta^{٢}$ = ن × ل × (١ – ل) حيث ل = ٠,١

= ٥ × ٠,١ × ٠,٩ = ٠,٤٥ وحدة

لاحظ أن:

١- توقع النجاح + توقع الفشل = ن حيث (ن) حجم العينة

توقع الوحدات السليمة + توقع الوحدات المعيبة = ٤,٥ + ٠,٥ = ٥ وحدات

٢- تباين النجاح = تباين الفشل

وبالمثل الانحراف المعيارى للنجاح = الانحراف المعيارى للفشل

توزيع بواسون Poission Distribution

يستخدم هذا التوزيع فى حالة المتغيرات المنفصلة التى تتصف بالندرة، أى التى يكون احتمال تحققها صغيراً جداً ويعتبر حالة خاصة من توزيع ذو الحدين، وخاصة إذا كان عدد المحاولات (ن) كبيراً جداً، بالإضافة إلى أن احتمال الحدوث (ل) ضئيلاً جداً (أقل من ١٠%)

ومن ثم فإن الأسس التى يقوم عليها توزيع بواسون هى:

١. أن عدد المحاولات الكلية (حجم التجربة أو العينة) كبيراً جداً (ن ≤ ٣٠)
٢. أن المحاولات مستقلة عن بعضها.
٣. احتمال النجاح (ل) ثابت فى أى محاولة وقيمته صغيرة جداً (ل < ٠,١)

والدالة الاحتمالية لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية:

$$ح(س) = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س}}{\underline{|س}}$$

حيث: هـ أساس اللوغاريتم الطبيعى هـ = ٢,٧١٨٣

μ الوسط الحسابى أو القيمة المتوقعة لعدد مرات النجاح.

س عدد مرات النجاح س = ٠، ١، ٢، ......، ∞

$\underline{|س}$ مضروب س = س(س – ١) (س –٢) ... ٣ × ٢ × ١

علما بأن: $\lfloor 0$ = ١، (أى مقدار)$^{\text{صفر}}$ = ١

الخصائص الإحصائية لتوزيع بواسون:

القيمة المتوقعة μ = ن × ل

التباين δ^2 = ن × ل

أى أن القيمة المتوقعة = التباين لتوزيع بواسون

ومن الناحية العملية فإن توزيع بواسون يستخدم فى مجالات كثيرة وخاصة فى المجال الصناعى الذى يتسم بالإنتاج الكبير لأن احتمالات الأخطاء تكون ضئيلة جداً مثل صناعة السيارات، وقطع الغيار، وصناعة المسامير كما يستخدم بشكل كبير فى مجال الطباعة، واحتمالات الوفاة للمؤمنين لدى شركات التأمين.

مثال (٤): إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب فى أحد المصانع ١% سحبت عينة من إنتاج هذا المصنع حجمها ٥٠ وحدة، احسب ما يلى:

١- احتمال ألا نجد بالعينة أى وحدة معيبة.

٢- احتمال أن نجد بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة.

٣- احتمال أن نجد بالعينة ٤ وحدات على الأقل معيبة.

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة.

الحـــــل

ن = ٥٠ ل = ٠,٠١ μ = ن × ل = ٥٠ × ٠,٠١ = ٠,٥

١- احتمال ألا نجد بالعينة أى وحدة معيبة:

$$ح(٠) = \frac{(٢,٧١٨٣)^{-٠,٥} \times (٠,٥)^{٠}}{\lfloor ٠} = ٠,٦٠٦٥$$

٢- احتمال أن نجد بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة = $ح_{(٢)}$ + $ح_{(١)}$ + $ح_{(٠)}$

$$ح_{(١)} = \frac{(٢,٧١٨٣)^{-٠,٥} \times (٠,٥)^{١}}{|\underline{١}} = ٠,٣٠٣٣$$

$$ح_{(٢)} = \frac{(٢,٧١٨٣)^{-٠,٥} \times (٠,٥)^{٢}}{|\underline{٢}} = ٠,٠٧٥٨$$

∴ الاحتمال المطلوب = ٠,٦٠٦٥ + ٠,٣٠٣٣ + ٠,٠٧٥٨ = ٠,٩٨٥٦

٣- احتمال أن نجد ٤ وحدات على الأقل معيبة = ٤ معيبة أو ٥ معيبة أو .. أو ٥٠ معيبة.

= ١ – الاحتمال العكسى

= ١ – [٣ معيبة أو ٢ معيبة أو ١ معيبة أو صفر معيبة]

= ١ – [$ح_{(٣)}$ + $ح_{(٢)}$ + $ح_{(١)}$ + $ح_{(٠)}$]

$$ح_{(٣)} = \frac{(٢,٧١٨٣)^{-٠,٥} \times (٠,٥)^{٣}}{|\underline{٣}} = ٠,٠١٢٦$$

∴ الاحتمال المطلوب = ١ – [٠,٠١٢٦ + ٠,٩٨٥٦]

= ١ – ٠,٩٩٨٢ = ٠,٠٠١٨

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة:

بالنسبة لتوزيع بواسون فإن $\mu = \delta^{٢}$ = ن × ل = ٥٠ × ٠,٠١

= ٠,٥ وحدة

أى أننا لو سحبنا عدداً كبيراً جداً من العينات من إنتاج هذا المصنع وحجم كل عينة ٥٠ وحدة فإننا سنجد فى كل عينة فى المتوسط ٠,٥ وحدة معيبة.

هام جداً:

على الرغم من الصعوبة التى قد تبدو فى حساب الاحتمالات من خلال دالة توزيع بواسون إلا أن هناك علاقة تربط الاحتمالات بعضها ببعض وهذه العلاقة تعتمد على حساب $ح_{(٠)}$ وبالتالى يمكن حساب الاحتمالات التالية كما يلى:

$$ح_{(٠)} = ٠,٦٠٦٥$$

$$ح_{(١)} = ح_{(٠)} \times \frac{\mu}{١} = ٠,٦٠٦٥ \times \frac{٠,٥}{١} = ٠,٣٠٣٣$$

$$ح_{(٢)} = ح_{(١)} \times \frac{\mu}{٢} = ٠,٣٠٣٣ \times \frac{٠,٥}{٢} = ٠,٠٧٥٨$$

$$ح_{(٣)} = ح_{(٢)} \times \frac{\mu}{٣} = ٠,٠٧٥٨ \times \frac{٠,٥}{٣} = ٠,٠١٢٦$$

وهكذا

$$ح_{(١٠)} = ح_{(٩)} \times \frac{\mu}{١٠}$$

$$ح_{(س)} = ح_{(س-١)} \times \frac{\mu}{س}$$

٢- هناك جداول معدة لحساب الاحتمالات المختلفة إلا أن وجود العلاقة السابقة يقلل من أهمية استخدام تلك الجداول.

٣- ليس من الضرورى أن يأتى الاحتمال معلوماً حتى نحسب المتوسط μ فقد تأتى البيانات فى صورة نقوم من خلالها بحساب المتوسط الفعلى أى:

متوسط العينة $\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن}$ أو $\overline{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك}$

حسب نوع البيانات غير مبوبة أو مبوبة كما سبق وأشرنا.

وهنا نعتبر أن $\overline{س}$ تمثل متوسط المجتمع أى $\overline{س} = \mu$ ثم نتابع الحل من خلال دالة التوزيع، كما يتضح من المثال التالى:

مثال (٥): قام أحد المؤلفين بحصر عدد الصفحات التى بها أخطاء وفقاً لعدد الأخطاء فى كل صفحة فكان توزيع صفحات الكتاب كما يلى:

عدد الأخطاء	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الصفحات	٢٥٥	١٥٠	٥٠	١٥	١٠	٨	٥	٣	٢	١	١

فإذا أراد هذا المؤلف طباعة كتاب آخر فى نفس المطبعة على ألا يزيد عدد الأخطاء فى الصفحة الواحدة عن خطأين، فما هو احتمال أن تتحقق هذه الرغبة، على فرض أن الأخطاء المطبعية تتبع توزيع بواسون.

الحـــل

نحسب μ من خلال بيانات العينة على أساس أن $\mu = \overline{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

عدد الأخطاء (س)	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
عدد الصفحات (ك)	٢٥٥	١٥٠	٥٠	١٥	١٠	٨	٥	٣	٢	١	١	٥٠٠
س ك	صفر	١٥٠	١٠٠	٤٥	٤٠	٤٠	٣٠	٢١	١٦	٩	١٠	٤٦١

$$\mu = \overline{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٤٦١}{٥٠٠} = ٠,٩٢٢$$

احتمال ألا يزيد عدد الأخطاء عن خطأين = ح(٠) + ح(١) + ح(٢)

$$ح(٠) = \frac{(٢,١٧٨٣)^{-٠,٩٢٢} \times (٠,٩٢٢)^{٠}}{\underline{|٠}} = ٠,٣٩٧٧$$

$$ح(١) = ح(٠) \times \frac{٠,٩٢٢}{١} = ٠,٣٦٦٧$$

$$ح(٢) = ح(١) \times \frac{٠,٩٢٢}{٢} = ٠,١٦٩٠$$

الاحتمال المطلوب ٠,٩٣٣٤

الفصل الثالث

التوزيعات الاحتمالية المتصلة

Continuous Probability Distributions

التوزيع الطبيعى

Normal Distribution

تتعدد التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات المتصلة أو المستمرة وسوف نكتفى بتناول التوزيع الطبيعى وسنرجئ تناول باقى التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يتم تناولها عند حديثنا عن استخدامات الدوال الاحتمالية لتلك التوزيعات.

التوزيع الطبيعى Normal Distribution:

وهو من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استخداماً فى علم الإحصاء، ومنحنى هذا التوزيع منحنى متماثل أو متعادل أى أننا لو أسقطنا من قمة المنحنى عمود على المحور الأفقى فإنه يقسم المنحنى إلى نصفين متطابقين تماماً ومساحة كل نصف منهما (مجموع الاحتمالات) = ٠,٥ .

وترجع أهمية التوزيع الطبيعى إلى أسباب عديدة من أهمها:

١- أن معظم الظواهر الطبيعية تتبع فى توزيعها التوزيع الطبيعى أو تكون قريبة جداً منه، حيث تتركز قياساتها عند قيمتها الوسطى ثم تبتعد عن هذه القيمة فى الاتجاهين (التزايد والتناقص) بشكل يكاد يكون متعادلاً.

٢- أن معظم القياسات التى تتم من خلال عينة، كالوسط الحسابى ($\overline{س}$) والانحراف المعيارى (ع) والنسبة ($\hat{ل}$) لها توزيع احتمالى يقترب من التوزيع الطبيعى مهما كان التوزيع الاحتمالى للمجتمع الأصلى المسحوب منه العينة، ويزداد اقترابها من التوزيع الطبيعى بزيادة حجم العينة، لذلك يستخدم التوزيع الطبيعى فى المعالجة الإحصائية لهذه المقاييس، فلو أننا سحبنا عدداً من العينات قدره (ن) وحسبنا الوسط الحسابى لكل عينة أى $\overline{س}_{١}$، $\overline{س}_{٢}$، $\overline{س}_{٣}$، ....، $\overline{س}_{ن}$ فإن توزيع هذه المتوسطات يأخذ شكل منحنى قريباً جداً من شكل المنحنى الطبيعى حتى ولو كان توزيع المجتمع الأصلى الذى سحبت منه العينة ليس توزيعاً طبيعياً.

٣- بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات المنفصلة مثل توزيع ذو الحدين أو توزيع بواسون يمكن تحويلها إلى التوزيع الطبيعى ولكن وفقاً لشروط معينة تتعلق بحجم العينة وقيمة الاحتمال وطبيعة التوزيع الاحتمالى فى المجتمع.

٤- هناك جدول لحساب المساحات (الاحتمالات) أسفل المنحنى الطبيعى وهو بذلك يعتبر من أهم المزايا التى يتمتع بها التوزيع الطبيعى نظراً لصعوبة أو استحالة حساب الاحتمالات المختلفة من الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعى إلى جانب سهولة استخدام الجدول.

دالة كثافة الاحتمال :Probability Denisty Function

الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعى تأخذ الصورة التالية:

$$ح_{(س)} = \frac{١}{\delta\sqrt{٢ط}} \times هـ^{\frac{-١}{٢}\left(\frac{س - \mu}{\delta}\right)^{٢}}$$

حيث:

μ = الوسط الحسابى للتوزيع (التوقع) هـ = ٢,٧١٨٣

δ = الانحراف المعيارى للتوزيع ط = $\frac{٢٢}{٧}$

س = قيمة المتغير العشوائى، حيث $- \infty \leq$ س $\leq + \infty$

خصائص التوزيع الطبيعى

Characteristics of Normal Dis.

هناك خصائص عديدة لمنحنى التوزيع الطبيعى وهى تعتبر الأساس الذى يقوم عليه الاستنتاج الإحصائى Statistical Inference ومن أهم تلك الخصائص:

١- تصل قمة المنحنى الممثل للتوزيع إلى نهايتها العظمى عندما تصبح قيمة المتغير العشوائى مساوية للوسط الحسابى (س = μ).

٢- تتساوى مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) فى التوزيع الطبيعى.

٣- يمتد طرفا المنحنى إلى الاتجاهين الموجب والسالب إلى مالا نهاية ($\pm \infty$) دون أن يلتقيا مع المحور الأفقى.

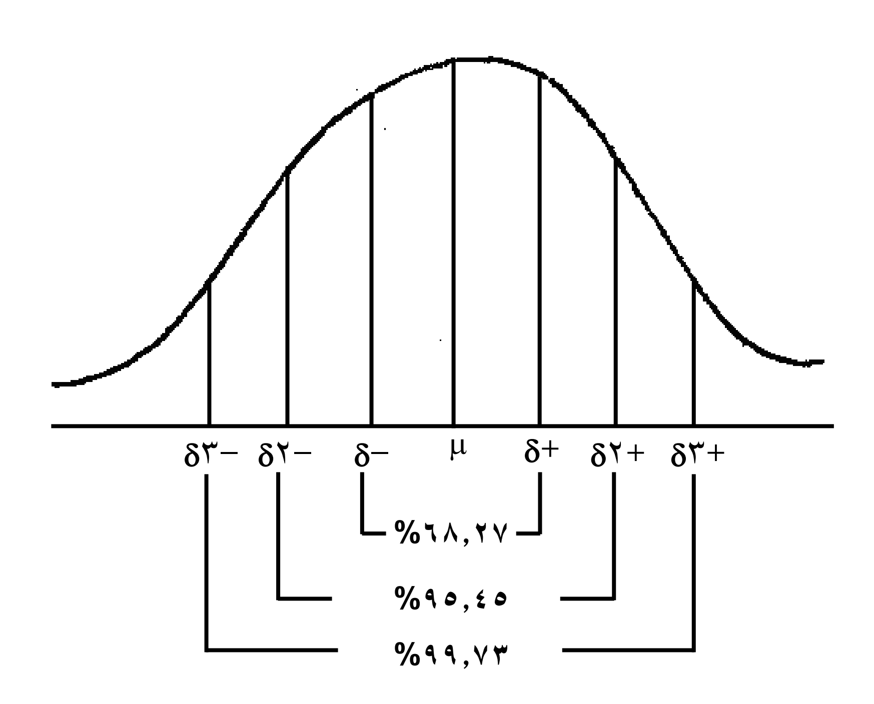
٤- إجمالى المساحة أسفل المنحنى الطبيعى (مجموع الاحتمالات) = ١.

٥- هناك بعض المساحات أسفل المنحنى الطبيعى لها أهمية خاصة فى التحليل الإحصائى وهى:

١/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى ± انحراف معيارى تعادل ٦٨,٢٧% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.

٢/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى ±٢ انحراف معيارى تعادل ٩٥,٤٥% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.

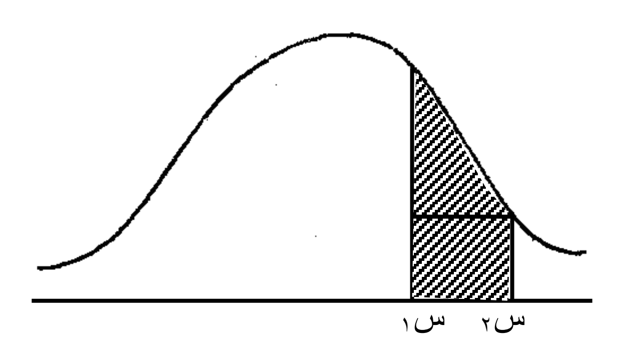
٣/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى ±٣ انحراف معيارى تعادل ٩٩,٧٣% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.



التوزيع الطبيعى المعيارى Standard Normal Dis.:

إذا أردنا حساب المساحة أسفل المنحنى الطبيعى التى تقع بين القيمة $س_١$، $س_٢$ مثلاً فإنه من الضرورى إجراء التكامل على دالة التوزيع الطبيعى السابق الإشارة إليها أى:

$$\int_{س_١}^{س_٢} \frac{١}{\delta \sqrt{٢ط}} \times هـ^{\frac{-١}{٢}\left(\frac{س - \mu}{\delta}\right)^٢}$$



وعلى ذلك فإننا لكى نحسب قيمة التكامل لابد من معرفة $س_١$، $س_٢$، μ، δ، ولو تصورنا أننا تسهيلاً لذلك سنقوم بإعداد جدول لحساب الاحتمالات المختلفة لكان ذلك أمراً مستحيلاً لأن قيم أى متغير متصل لا نهائية، هذا إلى جانب اختلاف قيم (μ، δ) من ظاهرة لأخرى وقد تكون معالم المجتمع (μ، δ) مجهولة لبعض الظواهر مما يستحيل معه حساب الاحتمالات الخاصة بها، إلا أنه جرت العادة على اعتبار أن مؤشرات العينة ($\overline{س}$، ع) تعتبر تقديرات غير متحيزة لمعالم المجتمع المجهولة أى اعتبار أن $\mu = \overline{س}$، وأن δ = ع مع ملاحظة أنه عند حساب الانحراف المعيارى للعينة (ع) نقوم بالقسمة على (ن−١) بدلاً من (ن) كما يلى:

$$ع = \sqrt{\frac{1}{ن - 1}\left(مجـ\ س^2 - \frac{(مجـ\ س)^2}{ن}\right)}$$

وقد أمكن التغلب على هذه المشاكل وذلك بتحويل قيم المتغير العشوائى (س) أى $س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، $س_ن$ إلى قيم معيارية (ى) Standard value كما سبق وأشرنا عند حساب القيمة المعيارية فى مقاييس التشتت:

$$ى = \frac{س - \mu}{\delta}$$

والقيمة المعيارية (ى) عبارة عن متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى وسطه الحسابى μ = صفر وانحرافه المعيارى δ = ١ وعلى ذلك تتحول دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى بالقيم العادية (س) إلى دالة كثافة الاحتمال بالقيم المعيارية (ى):

$$ح(ى) = \frac{1}{\sqrt{2ط}} \times هـ^{\frac{-1}{2} ى^2}$$

وعلى ذلك فإنه لحساب الاحتمالات الخاصة بالمتغير العشوائى والذى يتبع توزيعاً طبيعياً معالمه (μ، δ) نقوم بتحويل قيم (س) إلى قيم معيارية (ى) ثم نقوم بالكشف فى الجدول رقم (١) بالملاحق عن المساحة الإجمالية المناظرة.

وهذا الجدول يحتوى على قيم (ى) المعيارية من ى = صفر، ويقابلها احتمال ح(ى) = ٠,٥ إلى ى = ٤ ويقابلها احتمال ح(ى) = ٠,٩٩٩٩٧، فإذا زادت قيمة (ى) عن ٤ فإننا نأخذ نفس قيمة الاحتمال الأخير المقابل للقيمة ٤ أى (٠,٩٩٩٩٧)

ومعنى ذلك أنه لكى نحصل على قيمة الاحتمال بصورة مباشرة من الجدول فإنه لابد أن يكون فى صورة:

ح (ى $\geq$ رقم موجب)

أى لابد من توافر شرطين:

١- أن يكون المطلوب حساب احتمال أن يأخذ المتغير قيمة معينة أو أقل منها.

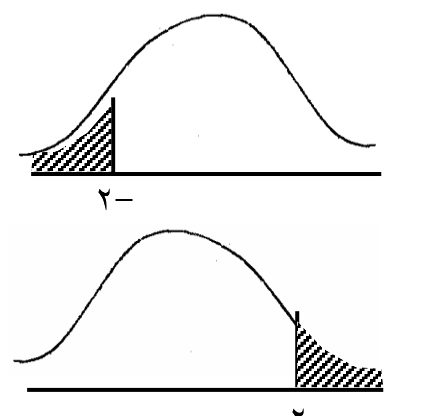
٢- أن تكون القيمة المعيارية (ى) المقابلة لقيمة (س) المطلوبة موجبة.

فمثلاً ح (ى ≤ ٢) نحصل عليها مباشرة من الجدول لتوافر الشرطين،

ح (ى ≤ ٢) = ٠,٩٧٧٢٥

لكن ما هو التصرف فى حالة عدم توافر شرط منهما أى يكون المطلوب ح (ى ≤ −) أو ح (ى ≥ +)

لاحظ أن التعامل مع هاتين الحالتين يكون واحداً لأن المساحة (الاحتمال) المطلوبة فى الحالتين واحدة كما يتضح من الشكلين المقابلين.

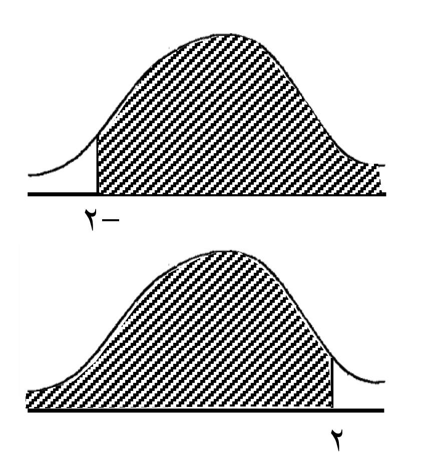


أى أن ح (ى ≤ −) = ح (ى ≥ +) = ١ − ح (ى ≤ +)

ح (ى ≤ −٢) = ١ − ح (ى ≤ ٢) = ١ − ٠,٩٧٧٢٥ = ٠,٠٢٢٧٥

ح (ى ≥ ٢) = ١ − ح (ى ≤ ٢) = ١ − ٠,٩٧٧٢٥ = ٠,٠٢٢٧٥

ثم نأتى إلى تساؤل آخر، ما هو التصرف فى حالة عدم توافر الشرطين الخاصين بالكشف مباشرة فى الجدول أى عندما يكون المطلوب = ح(ى ≤ −)



لاحظ أن الشكلين المقابلين متطابقين بمعنى أن:

ح (ى ≤ −) = ح (ى ≥ +)

ح (ى ≤ −٢) = ح (ى ≥ ٢) = ٠,٩٧٧٢٥ مباشرة من الجدول

لاحظ أن ح (ى ≥ صفر) = ح (ى ≤ صفر) = ٠,٥

وذلك دون الكشف فى الجداول (خصائص التوزيع الطبيعى المعيارى)

وقبل أن نتناول هذا الموضوع بالأمثلة نود أن نوضح بعض الأمور التى قد تواجهنا عند حساب بعض الاحتمالات:

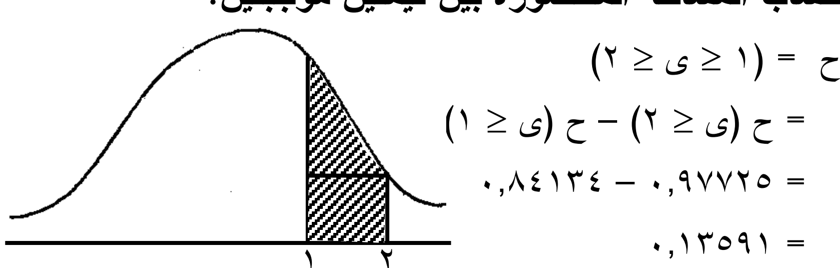
حساب المساحة المحصورة بين قيمتين موجبتين:

ح = (١ ≥ ى ≥ ٢)

= ح (ى ≥ ٢) − ح (ى ≥ ١)

= ٠,٩٧٧٢٥ − ٠,٨٤١٣٤

= ٠,١٣٥٩١



حساب المساحة المحصورة بين قيمتين سالبتين:

ح (−٢ ≥ ى ≥ −١) = ح (١ ≥ ى ≥ ٢)

= ح (ى ≥ ٢) − ح(ى ≥ ١)

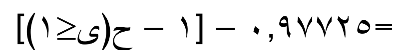
= ٠,١٣٥٩١

نفس المساحة المطلوبة سابقاً.

−٢ −١

حساب المساحة المحصورة بين قيمة موجبة وأخرى سالبة:

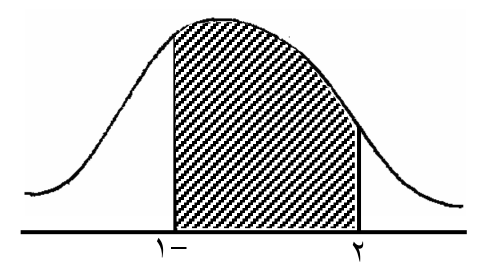
ح (-١ ≤ ى ≤ ٢) = ح (ى ≤ ٢) - (ى ≤ -١)


=٠,٩٧٧٢٥ - [١ - ح(ى≤١)]

= ٠,٩٧٧٢٥ - [١-٠,٨٤١٣٤]

= ٠,٩٧٧٢٥ - ٠,١٥٨٦٦

= ٠,٨١٨٥٩



وسوف تتضح طريقة استخدام الجداول فى حساب الاحتمالات المختلفة من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (١): إذا كان متوسط عمر الطالب فى الكلية ٢٠ سنة بانحراف معيارى ٥ سنوات وعلى فرض أن العمر يتبع التوزيع الطبيعى، احسب الاحتمالات التالية:

١- احتمال أن يتراوح عمر أحد الطلاب بين ٢٢، ٢٥ سنة:

ح (٢٢ ≤ س ≤ ٢٥) تحول إلى قيمة معيارية (ى) وفقاً للعلاقة:

$$ى = \frac{س - \mu}{\delta} \qquad \text{حيث } \mu = ٢٠ ، \delta = ٥$$

$$ح \left(\frac{٢٢ - ٢٠}{٥} \le ى \le \frac{٢٥ - ٢٠}{٥} \right) = ح(٠,٤ \le ى \le ١)$$

ح (٠,٤ ≤ ى ≤ ١) = ح (ى ≤ ١) - ح (ى ≤ ٠,٤)

= ٠,٨٤١٣٤ - ٠,٦٥٥٤٢

= ٠,١٨٥٩٢

٢- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أكبر من ٢٥ سنة:

ح (س > ٢٥) = ح (ى > (٢٥ – ٢٠) / ٥) = ح (ى > ١)

= ١ – ح (ى ≥ ١) = ١ – ٠,٨٤١٣٤

= ٠,١٥٨٦٦

٣- احتمال أن يكون عمر الطالب أكبر من ١٨ سنة:

ح (س > ١٨) = ح (ى > (١٨ – ٢٠) / ٥) = ح (ى > –٠,٤)

ح (ى > –٠,٤) = ح (س ≥ ٠,٤) = ٠,٦٥٥٤٢

٤- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أقل من ١٦ سنة:

ح (س < ١٦) = ح (ى < (١٦ – ٢٠) / ٥) = ح (ى < –٠,٨)

= ١ – ح (ى < ٠,٨)

= ١- ٠,٧٨٨١٤ = ٠,٢١١٨٦

٥- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أقل من ٢٦ سنة:

ح (س < ٢٦) = ح (ى < (٢٦ – ٢٠) / ٥) = ح (ى < ١,٢)

= ٠,٨٨٤٩٣

٦- احتمال أن يبلغ عمر أحد الطلاب ٢٤ سنة:

سبق أن أشرنا أن القيم التى يمكن أن نحصل على احتمالاتها مباشرة من الجدول تكون فى صورة ح (ى ≥ +)، ثم تعرفنا على كيفية حساب الاحتمالات فى حالة اختلاف شرط (الإشارة أو الاتجاه) أو فى حالة

اختلاف الشرطين (الإشارة والاتجاه) وهذا يعنى أن ح (ى = رقم معين) = صفر.

إلا أننا يمكن ان نعتبر أن القيمة المطلوبة للمتغير كأنها مركز لفئة حديها القيمة المطلوبة ±٠,٥ أى أننا نضع المطلوب السابق فى الصورة التالية:

$$ح (س = ٢٤) = ح (٢٣,٥ \leq س \leq ٢٤,٥)$$

$$= ح \left(\frac{٢٣,٥ - ٢٠}{٥} \leq ى \leq \frac{٢٤,٥ - ٢٠}{٥} \right)$$

$$= ح (٠,٧ \leq ى \leq ٠,٩)$$

$$= ح (ى \leq ٠,٩) - ح (ى \leq ٠,٧)$$

$$= ٠,٨١٥٩٤ - ٠,٧٥٨٠٤$$

$$= ٠,٠٥٧٩٠$$

حساب القيمة إذا علم الاحتمال:

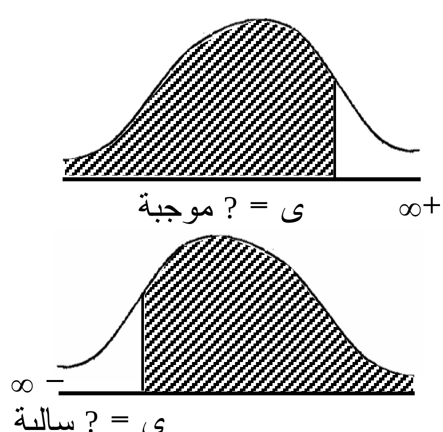
سبق أن أشرنا إلى أن أول قيمة معيارية هى ى = ٠ يقابلها احتمال ح(ى) = ٠,٥ ومعنى ذلك أن أول احتمال معلوم بالجدول = ٠,٥ وبالتالى لا يمكن الكشف عن قيمة (ى) إذا علم احتمالها إلا إذا كان الاحتمال ح(ى) ≤ ٠,٥، ولكى نصل إلى أسلوب مبسط لحساب القيمة إذا علم الاحتمال سنتناول الأمر كحالتين:

الحالة الأولى: إذا كان الاحتمال > ٠,٥

ولنأخذ مثلاً أن الاحتمال المعلوم ٠,٧٥

ونكون أمام حالتين إما:

ح (ى ≤ ?) = ٠,٧٥



هنا يتم الكشف مباشرة فى الجدول أمام القيمة ٠,٧٥ من عمود ح(ى) لنحدد من العمود المقابل لها قيمة ى = ٠,٦٧

أو ح (ى ≤ ?) = ٠,٧٥

لاحظ أن قيمة ى فى هذه الحالة تساوى قيمتها فى الحالة السابقة مع اختلاف الإشارة فهى موجبة فى الحالة الأولى وسالبة فى هذه الحالة.

∴ ى = −٠,٦٧

الحالة الثانية: إذا كان الاحتمال < ٠,٥

فى هذه الحالة وكما سبق وأشرنا لن نتمكن من استخدام الجدول وبالتالى لابد أن نوجد الاحتمال المكمل حيث:

ح (ى ≥ ?) = ٠,٣٥ = ح (ى ≤ ?) = ٠,٦٥

ح (ى ≤ ?) = ٠,٤٥ = ح (ى ≥ ?) = ٠,٥٥

ثم نكشف بالجدول عن الاحتمال المكمل مع تطبيق نفس ما توصلنا إليه فى الحالة الأولى.

أى أن ح (ى ≤ ?) = ٠,٦٥   ى = −٠,٣٩ سالبة لأنها ≤

ح (ى ≥ ?) = ٠,٥٥   ى = ٠,١٣ موجبة لأنها ≥

مثال (٢): قامت شركة النصر لصناعة اللمبات الكهربائية باختبار ١٠٠٠٠ لمبة من إنتاجها فتبين أن متوسط عمر اللمبة (مدة الإضاءة) ١٢٠٠ ساعة بانحراف معيارى ٣٠٠ ساعة، وعلى فرض أن عمر اللمبة الكهربائية متغير عشوائى يتبع توزيعاً طبيعياً، احسب ما يلى:

١- احتمال أن توجد لمبة عمرها أكبر من ١٥٠٠ ساعة:

$$ح\ (س > ١٥٠٠) = ح \left(ى > \frac{١٥٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} \right)$$

= ح (ى > ١)   = ١ − ح (ى ≥ ١)

= ١ − ٠,٨٤١٣٤ = ٠,١٥٨٦٦

٢- احتمال أن توجد لمبة عمرها أقل من ٩٠٠ ساعة:

$$\text{ح}\,(\text{س} < ٩٠٠) = \text{ح}\left(\text{ى} < \frac{٩٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠}\right)$$

$$= \text{ح}\,(\text{ى} < -١) = ١ - \text{ح}\,(\text{ى} < ١)$$

$$= ١ - ٠,٨٤١٣٤ = ٠,١٥٨٦٦$$

٣- احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات بين ١٢٠٠، ١٦٠٠ ساعة:

$$\text{ح}\,(١٢٠٠ \leq \text{س} \leq ١٦٠٠)$$

$$= \text{ح}\left(\frac{١٢٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} \leq \text{ى} \leq \frac{١٦٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠}\right)$$

$$= \text{ح}\,(\text{صفر} \leq \text{ى} \leq ١,٣٣)$$

$$= \text{ح}\,(\text{ى} \leq ١,٣٣) - \text{ح}\,(\text{ى} \leq \text{صفر})$$

$$= ٠,٩٠٨٢٤ - ٠,٥ = ٠,٤٠٨٢٤$$

٤- عدد اللمبات التى يتراوح عمرها بين ١١٠٠ ساعة، ١٥٠٠ ساعة:

نحسب الاحتمال أولاً:

$$\text{ح}\,(١١٠٠ \leq \text{س} \leq ١٥٠٠)$$

$$= \text{ح}\left(\frac{١١٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} \leq \text{ى} \leq \frac{١٥٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠}\right)$$

$$= \text{ح}\,(-٠,٣٣ \leq \text{ى} \leq ١)$$

$$= \text{ح}\,(\text{ى} \leq ١) - \text{ح}\,(\text{ى} \leq -٠,٣٣)$$

$$= ٠,٨٤١٣٤ - [١ - \text{ح}\,(\text{ى} \leq ٠,٣٣)]$$

$$= ٠,٨٤١٣٤ - [١ - ٠,٦٢٩٣٠]$$

= ٠,٨٤١٣٤ − ٠,٣٧٠٧٠ = ٠,٤٧٠٦٤

∴ عدد اللمبات التى يتراوح عمرها بين ١١٠٠، ١٥٠٠ ساعة

= ١٠٠٠٠ × ٠,٤٧٠٦٤ = ٤٧٠٦ لمبة

٥- العمر الذى يقل عنه عمر ٧٠% من عدد اللمبات:

ح (ى < ?) = ٠,٧٠ من الجدول مباشرة ى = ٠,٥٣

وحيث أن: ى = $\frac{\text{س} - \mu}{\delta}$

$$٠,٥٣ = \frac{\text{س} - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س − ١٢٠٠ = ١٥٩ ∴ س = ١٣٥٩ ساعة

ومعنى ذلك أن ٧٠% من عدد اللمبات (٧٠٠٠ لمبة) يبلغ عمر كل منها أقل من ١٣٥٩ ساعة.

٦- العمر الذى يقل عنه عمر ٢٥% من عدد اللمبات:

ح (ى < ?) = ٠,٢٥ = ح (ى > ?) = ٠,٧٥ لأنه أقل من ٠,٥، ثم نكشف بالجدول أمام ح(ى) = ٠,٧٥ فنحصل على قيمة ى نضع لها إشارة سالبة لأن الاتجاه ≤

ى = −٠,٦٨

$$-٠,٦٨ = \frac{\text{س} - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س − ١٢٠٠ = −٢٠٤ ∴ س = ٩٩٦ ساعة

أى أن ٢٥% من عدد اللمبات (٢٥٠٠ لمبة) يبلغ عمر كل منها أقل من ٩٩٦ ساعة.

٧- العمر الذى يزيد عنه عمر ٨٠% من عدد اللمبات

ح (ى > ?) = ٠,٨٠

من الجدول مباشرة (أكبر من ٠,٥) مع وضع إشارة سالبة لأنها (>)

ى = -٠,٨٤

$$-٠,٨٤ = \frac{س - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س - ١٢٠٠ = -٢٥٢ ∴ س = ٩٤٨ ساعة

أى أن ٨٠% من عدد اللمبات (٨٠٠٠ لمبة) يزيد عمر كل منها على ٩٤٨ ساعة.

٨- العمر الذى يزيد عنه عمر ٤٥% من عدد اللمبات:

ح (ى > ?) = ٠,٤٥ نوجد الاحتمال المكمل لأنه أقل من ٠,٥

ح (ى > ?) = ٠,٤٥ = ح (ى < ?) = ٠,٥٥ من الجدول مباشرة.

ى = ٠,١٣

$$٠,١٣ = \frac{س - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س - ١٢٠٠ = ٣٩ ∴ س = ١٢٣٩ ساعة

ومعنى ذلك أن ٤٥% من عدد اللمبات (٤٥٠٠ لمبة) يزيد عمر كل منها على ١٢٣٩ ساعة.

استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذو الحدين

Normal Dis. As an Approximation to the Binomial Dis.

يلاحظ من خلال ما سبق أن عرضناه من أمثلة تتعلق بتوزيع ذو الحدين أن حجم العينة دائماً صغير فإذا تخيلنا أن حجم العينة كبير فإن استخدام دالة التوزيع لحساب الاحتمالات المختلفة سيكون أمراً صعباً أو شبه مستحيل، كما يتضح من المثال التالى:

مثال (١): ألقيت قطعة نقود متماثلة على سطح أملس ٥٠٠ مرة، احسب احتمال ظهور الصورة فى ٣٠٠ مرة على الأقل.

الحـــل

احتمال ظهور الصورة ل = $\frac{١}{٢}$ ١ – ل = $\frac{١}{٢}$

احتمال ظهور الصورة ٣٠٠ مرة على الأقل = ٣٠٠ مرة أو ٣٠١ مرة أو ٣٠٢ مرة، ... أو ٥٠٠ مرة

$$= {}^{٥٠٠}\text{ق}_{٣٠٠}\,(٠,٥)^{٣٠٠}\,(٠,٥)^{٢٠٠} + {}^{٥٠٠}\text{ق}_{٣٠١}\,(٠,٥)^{٣٠١}\,(٠,٥)^{١٩٩}$$

$$+ {}^{٥٠٠}\text{ق}_{٣٠٢}\,(٠,٥)^{٣٠٢}\,(٠,٥)^{١٩٨} + \dots + {}^{٥٠٠}\text{ق}_{٥٠٠}\,(٠,٥)^{٥٠٠}\,(٠,٥)^{٠}$$

ولنا أن نتصور كم يستغرق استكمال هذا الحل من وقت وجهد واحتمـــال كبير للخطأ، ولذلك أمكن الاستفادة من خصائص التوزيع الطبيعى والتى منها إمكانية استخدامه كتقريب لبعض التوزيعات الأخرى وقد ســبق أن أشرنا إلى أننا نقوم بتحويل القيم الأصلية للمتغير العشوائى (س) إلى قيم معيارية (ى) من خلال العلاقة:

$$\text{ى} = \frac{\text{س} - \mu}{\delta}$$

ولما كان توقع توزيع ذو الحدين μ = ن × ل

وانحرافه المعيارى $\delta = \sqrt{\text{ن} \times \text{ل} \times (١ - \text{ل})}$

فإن ى $= \dfrac{\text{س} - (\text{ن} \times \text{ل})}{\sqrt{\text{ن} \times \text{ل} \times (١ - \text{ل})}}$

وتطبيق ذلك على المثال السابق فإننا نجد أن المطلوب:

$$\text{ح}\ (\text{س} \leq ٣٠٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \leq \frac{٣٠٠ - ٥٠٠ \times ٠,٥}{\sqrt{٥٠٠ \times ٠,٥ \times ٠,٥}}\right)$$

= ح (ى ≤ ٤,٤٧)

= ١ − ح (ى ≥ ٤,٤٧)

= ١ − ٠,٩٩٩٩٧ آخر قيمة بالجدول

= ٠,٠٠٠٠٣

مثال (٢): من المثال السابق احسب احتمال ظهور الصورة فى ٢٠٠ مرة على الأكثر.

الحــــل

$$\text{ح}\ (\text{س} \geq ٢٠٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \geq \frac{٢٠٠ - ٥٠٠ \times ٠,٥}{\sqrt{٥٠٠ \times ٠,٥ \times ٠,٥}}\right)$$

= ح (ى ≥ −٤,٤٧)

= ١ − ح (ى ≥ ٤,٤٧)

= ١ − ٠,٩٩٩٩٧

= ٠,٠٠٠٠٣

مثال (٣): ألقيت زهرتى نرد متماثلتين على سطح أملس ٣٠٠ مرة، احسب احتمال الحصول على مجموع ٩ على الأقل على سطح الزهرتين فى مائة مرة على الأقل.

الحـــــل

احتمال الحصول على مجموع ٩ على الأقل مـــن زهـــرتين = احتمـــال الحصول على مجموع ٩ + مجموع ١٠ + مجموع ١١ + مجموع ١٢

مجموع ٩ نحصل عليه من زهرتين من حاصل جمع (٦ ، ٣) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ٤) ، (٤ ، ٥) = ٤ طرق.

مجموع ١٠ نحصل عليه من زهرتين من حاصل جمع (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥) = ٣ طرق.

مجموع ١١ نحصل عليه من زهرتين من حاصل جمع (٦ ، ٥)،(٥ ، ٦) = ٢ طريقة.

مجموع ١٢ نحصل عليه من زهرتين من حاصل جمع (٦ ، ٦)= ١طريقة.

عدد الطرق = ١٠ طرق

∴ احتمال الحصول على مجموع ٩ على الأقل = $\frac{١٠}{٣٦}$

ل = $\frac{١٠}{٣٦}$ ١ – ل = $\frac{٢٦}{٣٦}$

الاحتمال المطلوب:

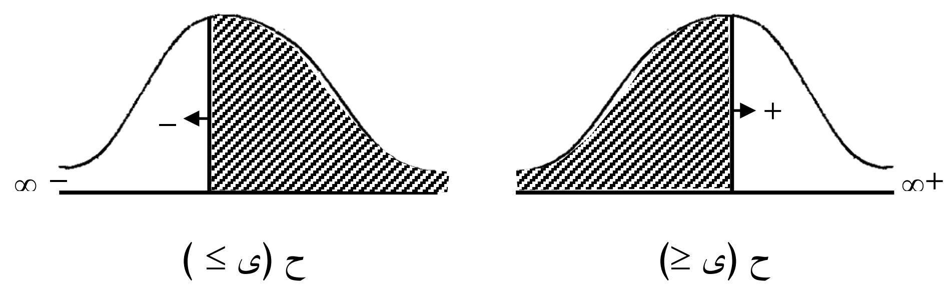
ح (س ≤ ١٠٠) = ح $\left(ى \leq \frac{١٠٠ - ٣٠٠ \times \frac{١٠}{٣٦}}{\sqrt{٣٠٠ \times \frac{١٠}{٣٦} \times \frac{٢٦}{٣٦}}} \right)$

= ح (ى ≤ ٢,١٥)

= ١ – ح (ى ≥ ٢,١٥) = ١ – ٠,٩٨٤٢ = ٠,٠١٥٨

تصحيح ياتس Yates Correction:

توصل ياتس إلى أن الاحتمالات الناتجة عن اسـتخدام دالـة التوزيـع الطبيعى تكون أقل من الاحتمالات الناتجة عن استخدام دالة دالة التوزيع ذو الحدين وهى الاحتمالات الفعلية الصـحيحة. ولكـى نصـل بتلـك الاحتمالات إلى القيمة الصحيحة فإنه لابد من زيـادة القيمـة المطلـوب حساب احتمالها (س) بمقدار ٠,٥ ولكن مع ملاحظة أن زيـادة القيمـة (حتى يزيد الاحتمال) قد تكون بإضافة ٠,٥ على قيمة المتغير العشوائى (س)، وقد تكون الزيادة بطرح ٠,٥ من قيمة المتغير العشوائى (س) كما يتضح من الشكلين التاليين:



ومعنى ذلك أنه إذا كان المطلوب حساب احتمال أن س ≥ رقم معين فإن زيادة المساحة أسفل المنحنى يتطلب الانتقال بقيمـة ى باتجـاه +∞ أى زيادة قيمة س بمقدار ٠,٥.

والعكس صحيح إذا كان المطلوب حساب احتمال أن س ≤ رقم معين فإن زيادة المساحة أسفل المنحنى يتطلب الانتقال بقيمـة ى باتجـاه −∞ أى بتقليل قيمة س بمقدار ٠,٥.

وعلى ذلك فإن حساب قيمة (ى) وفقاً لتصحيح ياتس يكون كما يلى:

$$\text{ى} = \frac{(\text{س} \pm \text{٠,٥}) - \text{ن} \times \text{ل}}{\sqrt{\text{ن} \times \text{ل} \times (\text{١} - \text{ل})}}$$

$$\text{ح}\left(\text{ى} \leq \frac{(\text{س} + \text{٠,٥}) - \text{ن} \times \text{ل}}{\sqrt{\text{ن} \times \text{ل} \times (\text{١} - \text{ل})}}\right)$$

$$\text{ح}\left(\text{ى} \geq \frac{(\text{س} - \text{٠,٥}) - \text{ن} \times \text{ل}}{\sqrt{\text{ن} \times \text{ل} \times (\text{١} - \text{ل})}}\right)$$

مثال (٤): تقدم لامتحان مادة الإحصاء بكلية التجارة فى العام الماضى ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٨٠٠٠ طالب فإذا أخذنا عينة من ٦٠٠ طالب منهم، احسب الاحتمالات التالية مرة بدون تصحيح ياتس ومرة بتصحيح ياتس.

١- احتمال أن يكون عدد الناجحين منهم ٥٠٠ طالب على الأقل:

$$\text{ل} = \frac{\text{٨٠٠٠}}{\text{١٠٠٠٠}} = \text{٠,٨} \qquad \text{١} - \text{ل} = \text{٠,٢} \qquad \text{ن} = \text{٦٠٠}$$

- بدون تصحيح ياتس:

$$\text{ح}(\text{س} \geq \text{٥٠٠}) = \text{ح}\left(\text{ى} \geq \frac{\text{٥٠٠} - \text{٦٠٠} \times \text{٠,٨}}{\sqrt{\text{٦٠٠} \times \text{٠,٨} \times \text{٠,٢}}}\right)$$

$$= \text{ح}(\text{ى} \geq \text{٢,٠٤})$$

$$= \text{١} - \text{ح}(\text{ى} \leq \text{٢,٠٤})$$

$$= \text{١} - \text{٠,٩٧٩٣} = \text{٠,٠٢٠٧}$$

- **بتصحيح ياتس:**

$$\text{ح}\ (\text{س} \leq ٥٠٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \leq \frac{(٥٠٠ - ٠,٥) - ٦٠٠ \times ٠,٨}{\sqrt{٦٠٠ \times ٠,٨ \times ٠,٢}}\right)$$

$$= \text{ح}\ (\text{ى} \leq ١,٩٩)$$

$$= ١ - \text{ح}\ (\text{ى} \geq ١,٩٩)$$

$$= ١ - ٠,٩٧٦٧$$

$$= ٠,٠٢٣٣$$

لاحظ زيادة قيمة الاحتمال باستخدام تصحيح ياتس.

٢- احتمال أن يكون عدد الناجحين منهم ٤٥٠ طالب على الأكثر:

- **بدون تصحيح ياتس:**

$$\text{ح}\ (\text{س} \geq ٤٥٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \geq \frac{٤٥٠ - ٦٠٠ \times ٠,٨}{\sqrt{٦٠٠ \times ٠,٨ \times ٠,٢}}\right)$$

$$= \text{ح}\ (\text{ى} \geq -٣,٠٦)$$

$$= ١ - \text{ح}\ (\text{ى} \geq ٣,٠٦)$$

$$= ١ - ٠,٩٩٨٩ = ٠,٠٠١١$$

- **بتصحيح ياتس:**

$$\text{ح}\ (\text{س} \geq ٤٥٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \geq \frac{(٤٥٠ - ٠,٥) - ٦٠٠ \times ٠,٨}{\sqrt{٦٠٠ \times ٠,٨ \times ٠,٢}}\right)$$

$$= \text{ح}\ (\text{ى} \geq -\ ٣,٠١)$$

$$= ١ - \text{ح}\ (\text{ى} \geq ٣,٠١)$$

$$= ١ - ٠,٩٩٨٧ = ٠,٠٠١٣$$

لاحظ زيادة قيمة الاحتمال.

٣- احتمال ألا يزيد عدد الناجحين من بينهم عن ٤٩٠ طالب:

- بدون تصحيح ياتس:

$$\text{ح}(\text{س} \le ٤٩٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \le \frac{٤٩٠ - ٦٠٠ \times ٠,٨}{\sqrt{٦٠٠ \times ٠,٨ \times ٠,٢}}\right)$$

$$= \text{ح}(\text{ى} \le ١,٠٧)$$

$$= ٠,٨٤٦١$$

- بتصحيح ياتس:

$$\text{ح}(\text{س} \le ٤٩٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \le \frac{(٤٩٠ + ٠,٥) - ٦٠٠ \times ٠,٨}{\sqrt{٦٠٠ \times ٠,٨ \times ٠,٢}}\right)$$

$$= \text{ح}(\text{ى} \le ١,٠٧)$$

$$= ٠,٨٥٧٧$$

٤- احتمال ألا يقل عدد الناجحين من بينهم عن ٤٦٠ طالب:

- بدون تصحيح ياتس:

$$\text{ح}(\text{س} \ge ٤٦٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \ge \frac{٤٦٠ - ٦٠٠ \times ٠,٨}{\sqrt{٦٠٠ \times ٠,٨ \times ٠,٢}}\right)$$

$$= \text{ح}(\text{ى} \ge ٢,٠٤) = \text{ح}(\text{ى} \le ٢,٠٤) = ٠,٩٧٩٣$$

- بتصحيح ياتس:

$$\text{ح}(\text{س} \ge ٤٦٠) = \text{ح}\left(\text{ى} \ge \frac{(٤٦٠ - ٠,٥) - ٦٠٠ \times ٠,٨}{\sqrt{٦٠٠ \times ٠,٨ \times ٠,٢}}\right)$$

$$= \text{ح}(\text{ى} \ge -٢,٠٩)$$

$$= \text{ح}(\text{ى} \le ٢,٠٩) = ٠,٩٨١٧$$

استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون:

Normal Dis. as an Approximation to the Poisson Dis.

كما سبق وأشرنا فى استخدام دالة التوزيع الطبيعى كتقريب لدالة توزيع ذو الحدين نظراً لصعوبة أو استحالة استخدام دالة توزيع ذو الحدين عندما تكون (ن) كبيرة جداً، وبالمثل فإنه من الصعوبة بمكان استخدام دالة توزيع بواسون فى حساب الاحتمالات عندما تكون (ن) كبيرة، وإن كانت الاحتمالات بعد حد معين تتضاءل قيمتها جداً حتى لتكاد أن تتلاشى، إلا أننا نظل فى حاجة إلى حسابها.

ولذلك يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعى فى حساب الاحتمالات الخاصة بهذا التوزيع.

ولما كانت القيمة المتوقعة = التباين لهذا التوزيع فإن:

– الانحراف المعيارى $\delta = \sqrt{\delta^{2}} = \sqrt{\mu} = \sqrt{ن \times ل}$

حيث أن μ = ن × ل

وبالتالى تحسب القيمة المعيارية (ى) كما يلى:

$$ى = \frac{س - ن \times ل}{\sqrt{ن \times ل}}$$

مثال (١): إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب فى أحد المصانع ٢% سحبت عينة عشوائية من ٤٠ وحدة، احسب احتمال أن يكون ربع حجم العينة على الأكثر من الوحدات المعيبة وبفرض أن توزيع الإنتاج المعيب يتبع توزيع بواسون.

الحـــل

ن = ٤٠ ل = ٠,٠٢ μ = ن × ل = ٤٠ × ٠,٠٢ = ٠,٨

المطلوب: أن $\frac{١}{٤}$ حجم العينة على الأكثر وحدات معيبة ح (س ≤ ١٠)

لاحظ أننا لو استخدمنا دالة توزيع بواسون كان علينا أن نحسب:

$$ح_{(١٠)} + ح_{(٩)} + ح_{(٨)} + \dots + ح_{(٠)}$$

أما باستخدام دالة التوزيع الطبيعى فإن:

$$ح\ (س \leq ١٠) = ح\left(ى \leq \frac{١٠ - ٤٠ \times ٠,٠٢}{\sqrt{٤٠ \times ٠,٠٢}}\right)$$

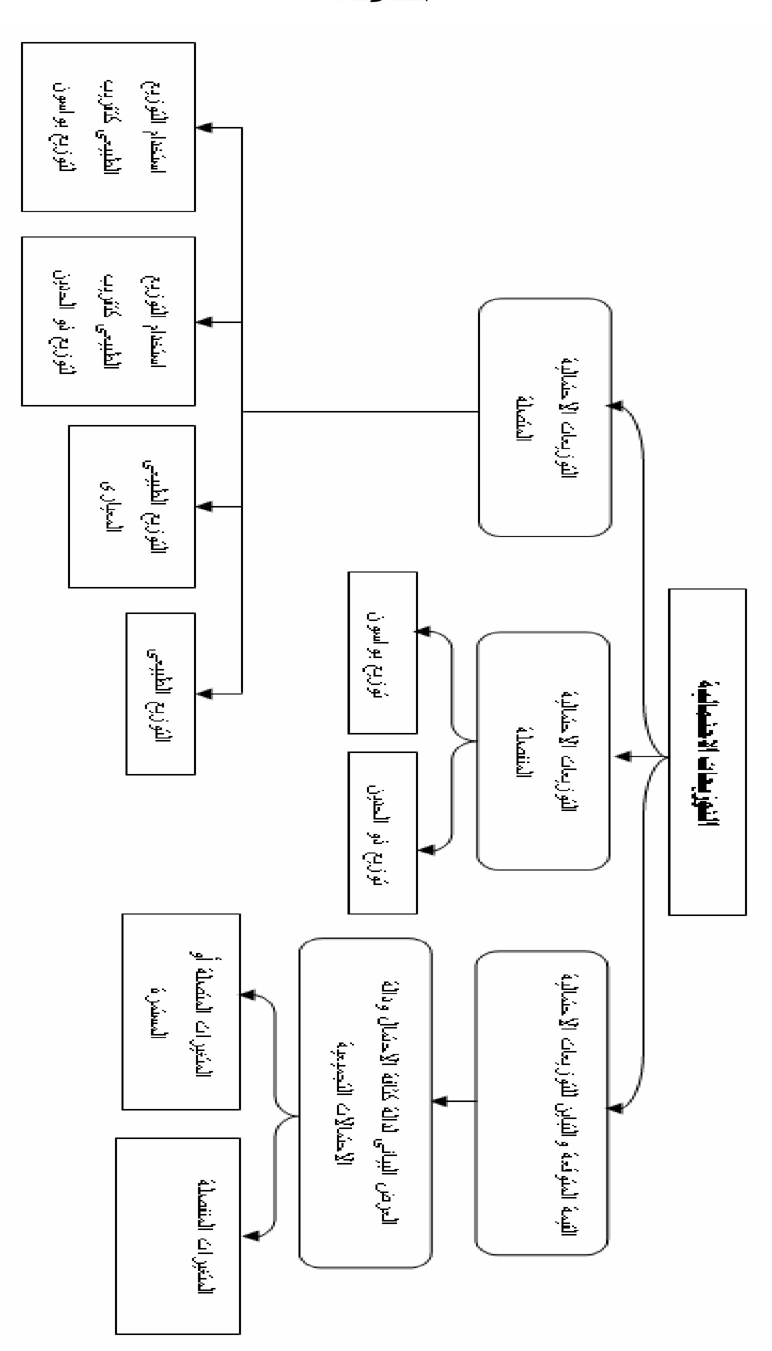
$$= ح\ (ى \leq ١٠,٢٩)$$

$$= ٠,٩٩٩٩٧$$

تدريب:

على الطالب إيجاد المطلوب باستخدام دالة توزيع بواسون وسيجد أن الفرق بين الاحتمالين تقريباً (٠,٠٠٠٠٢) وهذا يؤكد على أهمية استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

الخلاصة



التوزيعات الاحتمالية
القيمة المتوقعة والتباين للتوزيعات الاحتمالية
التوزيعات الاحتمالية المنفصلة
التوزيعات الاحتمالية المتصلة
العرض البيانى لدالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعية
توزيع ذو الحدين
توزيع بواسون
المتغيرات المنفصلة
المتغيرات المتصلة أو المستمرة
التوزيع الطبيعى
التوزيع الطبيعى المعيارى
استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذو الحدين
استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون

تمارين على التوزيعات الاحتمالية

(١) البيانات التالية تمثل عدد أفراد الأسرة فى عينة من ٥٠ أسرة:

٢ ٣ ٥ ٦ ٤ ٣ ٢ ٥ ٦ ٧

٨ ٥ ٣ ٤ ٦ ٥ ٢ ٦ ٥ ٥

٣ ٤ ٢ ٥ ٤ ٦ ٧ ٨ ٥ ٣

٣ ٢ ٧ ٦ ٥ ٧ ٢ ٤ ٤ ٣

٦ ٥ ٣ ٤ ٥ ٢ ٣ ٥ ٦ ٧

<u>والمطلوب</u>:

١- إعداد التوزيع الاحتمالى للبيانات السابقة.

٢- التمثيل البيانى لدالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعيــة لهذا التوزيع.

٣- حساب القيمة المتوقعة والتباين لعدد أفراد الأسرة.

(٢) الجدول التالى يبين توزيع ٣٠ شركة حسب فئات المبيعات الشهرية بالألف جنيه:

فئات المبيعات	١٥-	٣٠-	٤٥-	٦٠-	٧٥-٩٠
عدد الشركات	٦	١١	٧	٣	٣

<u>والمطلوب</u>:

١- إعداد التوزيع الاحتمالى للبيانات السابقة.

٢- التمثيل البيانى لدالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعيــة لهذا التوزيع.

٣- حساب القيمة المتوقعة والتباين لعدد أفراد الأسرة.

٤- حساب احتمال أن تكون مبيعات إحدى الشركات أقل من ٤٥ ألف جنيه.

٥- حساب احتمال أن تبلغ مبيعات إحدى الشركات ٦٠ ألف جنيه على الأقل.

(٣) الجدول التالى يوضح توزيع ٤٠ دارس حسب الدرجات فى إحدى الدورات التدريبية:

فئات الدرجات	صفر-	٣٥-	٥٠-	٦٥-	٨٠-	٩٠-١٠٠
عدد الدارسين	٣	٨	١٠	١٢	٥	٢

والمطلوب:

١- إعداد التوزيع الاحتمالى للبيانات السابقة.

٢- التمثيل البيانى لدالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمالات التجميعية.

٣- حساب القيمة المتوقعة والتباين لدرجات الدارسين.

٤- حساب احتمال أن يحصل الدارس على درجة أقل من ٥٠.

٥- حساب احتمال أن يحصل الدارس على ٨٠ درجة على الأقل.

(٤) إذا كانت نسبة الإنتاج المطابق للمواصفات فى أحد المصانع ٨٥% فإذا سحبنا عينة من ١٠ وحدات وعلى اعتبار أن توزيع الإنتاج يتبع توزيع ذو الحدين، احسب ما يلى:

١- احتمال أن نجد بالعينة ٣ وحدات مطابقة للمواصفات.

٢- احتمال أن نجد بالعينة أقل من ٣ وحدات مطابقة للمواصفات.

٣- احتمال أن نجد أن بالعينة ٣ وحدات على الأقل مطابقة للمواصفات.

٤- احتمال أن نجد بالعينة ٤ وحدات على الأكثر مطابقة للمواصفات.

٥- القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المطابقة للمواصفات فى العينة.

٦- الانحراف المعيارى لعدد الوحدات المطابقة للمواصــفات فــى العينة.

(٥) سحبت ١٠٠٠ عينة من إنتاج أحد المصانع وكل عينة مكونة من ٤ وحدات وتم اختبار هذه العينات فتبــين أن توزيعهــا وفقــاً لعــدد الوحدات السليمة فى العينة كما يلى:

عدد الوحدات السليمة	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد العينات	٣٠	٦٠	١٢٠	٤٨٠	٣١٠	١٠٠٠

فإذا علمت أن توزيع الوحدات السليمة فى العينات يتبع توزيع ذو الحدين، احسب ما يلى:

١- إجمالى عدد الوحدات السليمة فى العينات المسحوبة.
٢- الوسط الحسابى لعدد الوحدات السليمة فى العينة.
٣- احتمال وجود وحدة سليمة فى أى عينة.
٤- إذا اخترنا إحدى العينات، احسب ما يلى:
١/٤ احتمال أن يكون بالعينة ٣ وحدات على الأقل سليمة.
٢/٤ احتمال أن يكون بالعينة وحدة على الأقل سليمة.
٣/٤ القيمة المتوقعة لعدد الوحدات السليمة فى العينة.
٤/٤ الانحراف المعيارى لعدد الوحدات السليمة فى العينة.

(٦) فى دراسة عن دخل الفرد فى إحدى المدن تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠٠ فرد تبين منها أن متوسط الدخل الشهرى للفــرد ٤٠٠ جنيه بانحراف معيارى ١٠٠ جنيه. فإذا علمــت أن الــدخل يتبــع التوزيع الطبيعى، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يبلغ الدخل الشهرى لأحد الأفراد ٦٠٠ جنيــه علــى الأقل.

٢- احتمال أن يتراوح الدخل الشهرى لأحد الأفراد بين ٤٠٠ جنيه، ٦٠٠جنيه.
٣- عدد الأفراد الذين يبلغ دخلهم ٥٥٠ جنيه على الأكثر من بين أفراد العينة.
٤- عدد الأفراد الذين يتراوح دخلهم بين ٣٠٠ جنيه، ٣٥٠ جنيه.
٥- الدخل الشهرى الذى يبلغه أو يقل عنه دخل ٧٠% من عدد الأفراد بالعينة.
٦- الدخل الذى يزيد عنه دخل ٤٠% من عدد الأفراد بالعينة.

(٧) فى دراسة عن رأس المال العامل فى الشركات الصناعية بمدينة العاشر من رمضان تبين أن متوسط رأس المال ٥٠٠ مليون جنيه بانحراف معيارى ٢٠٠ مليون جنيه، فإذا علمت أن توزيع رأس المال العامل قريب جداً من التوزيع الطبيعى احسب ما يلى:
١- احتمال أن يبلغ رأس مال إحدى الشركات ٧٥٠ مليون جنيه على الأقل.
٢- احتمال أن يتراوح رأس مال إحدى الشركات بين ٦٠٠ مليون، ٨٠٠مليون جنيه.
٣- إذا اخترنا ١٠٠ شركة من بين هذه الشركات فما هو عدد الشركات التى يبلغ رأس مالها ٦٥٠ مليون جنيه على الأكثر من بين هذه الشركات.
٤- إذا اخترنا ١٠ شركات من هذه الشركات فما هو احتمال أن يتراوح إجمالى رأس مالها بين ٤٠٠٠ مليون، ٥٥٠٠ مليون جنيه.
٥- حدد قيمة رأس المال الذى يزيد عنه رأس مال ٧٥% من عدد الشركات.

٦- حدد قيمة رأس المال الذى يقل عنه رأس مال ٣٥% من عـــدد الشركات.

(٨) إذا علمت أن نسبة الإنتاج التالف فى أحد المصانع تبلـــغ ٣% فـــإذا سحبنا عينة من ١٠ وحدات من إنتاج المصنع وكان الإنتاج التالف يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يكون بالعينة وحدتين على الأكثر تالفة.

٢- احتمال أن يكون بالعينة ٤ وحدات على الأقل تالفة.

(٩) سحبت ٥٠٠ عينة من إنتاج أحد المصانع وكل عينة مكونة مـــن ٥ وحدات وتم اختبار هذه العينات فوجــد أن توزيعهـــا وفقـــاً لعـــدد الوحدات المعيبة فى كل عينة كما يلى:

عدد الوحدات المعيبة	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
عدد العينات	٣٥٠	١٠٠	٣٠	١٠	٧	٣	٥٠٠

المطلوب:

١- حساب إجمالى عدد الوحدات المعيبة فى كل العينات.

٢- حساب متوسط عدد الوحدات المعيبة والانحراف المعيارى لعدد الوحدات المعيبة بالعينة.

٣- حساب احتمال إنتاج وحدة معيبة فى هذا المصنع.

٤- إذا اخترنا عينة من إنتاج المصنع وكان توزيع الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

٤/١ احتمال أن يكون بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة.

٤/٢ احتمال أن يكون بالعينة وحدة على الأقل معيبة.

٤/٣ التوقع الرياضى والتباين لعدد الوحدات المعيبة بالعينة.

(١٠) إذا علمت أنه من واقع سجلات الكلية تبين أن احتمال أن يحصل الطالب على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات يبلغ ٠,٨٥، فإذا اخترنا عينة من ١٠٠ طالب من الملتحقين بالكلية هذا العام وكان توزيع الطلاب يتبع توزيع ذو الحدين، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يحصل ٧٠ طالب على الأكثر على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات.

٢- احتمال أن يحصل ٤٥ طالب على الأقل على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات.

٣- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الطلاب الذين يحصلون على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات فى هذه العينة.

٤- احتمال أن يتراوح عدد الذين يحصلون على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات فى هذه العينة بين ٦٥، ٨٥ طالب.

٥- هل الاحتمالات السابقة حقيقية أم تقريبية ولماذا؟ وما هو الإجراء اللازم لتصحيحها إن كانت تقريبية؟

(١١) إذا كان احتمال وجود أخطاء فى إحدى صفحات كتاب الإحصاء ٤% فإذا علمت أن كتاب الإحصاء يحتوى على ٥٠٠ صفحة وأن توزيع الأخطاء يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١- احتمال وجود أخطاء فى ٣٠٠ صفحة على الأقل.

٢- احتمال وجود أخطاء فى ٢٥٠ صفحة على الأكثر.

٣- احتمال أن تتراوح عدد الصفحات التى بها أخطاء بين ٣٥٠، ٤٥٠صفحة.

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الصفحات التى بها أخطاء بالكتاب.

الباب السابع
نظرية العينات
SAMPLING THEORY

الفصل الأول: المعاينة العشوائية

الفصل الثانى: نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع

Estimation Theory

أولاً: تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة ($\bar{س}$)

ثانياً: تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$).

ثالثاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$)

رابعاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين ($ل_1 - ل_2$).

الأهداف السلوكية:

بعد دراسة موضوع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على:

١- تحديد حجم العينة ومعرفة المعايير التى تحكم عملية تحديد حجم العينة.

٢- معرفة نظرية النهاية المركزية.

٣- تقدير معالم المجتمع إما بنقطة أو بفترة ثقة.

٤- أن يتعرف على توزيع (ت).

العناصر:

[١] الفصل الأول: المعاينة العشوائية:

١- بعض التعاريف والمصطلحات

١/١ المجتمع.

٢/١ طريقة المعاينة

٣/١ وحدة المعاينة

٤/١ الإطار

٥/١ خطأ التحيز.

٦/١ الخطأ العشوائى أو خطأ الصدفة أو خطأ العينة.

٢- تحديد حجم العينة

١/٢ درجة تجانس مفردات العينة.

٢/٢ درجة الدقة المطلوبة فى التقدير.

٣/٢ درجة الثقة أو مستوى الثقة فى التقدير الذى نحصل عليه من العينة.

٣- نظرية النهاية المركزية.

[٢] الفصل الثانى: نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع.

١- تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة ($\overline{س}$)

١/١ تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (σ)

٢/١ تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع)

٣/١ حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ).

٢- تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$)

١/٢ إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال.

٢/٢ إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال.

٣/٢ حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل)

٣- تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_١ - \mu_٢$).

١/٣ التباين للمجتمعين $\sigma_١^٢$ ، $\sigma_٢^٢$ معلومين.

٢/٣ التباين للمجتمعين مجهولين.

٤- تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين ($ل_١ - ل_٢$).

[٣] الخلاصة.

[٤] تمارين على الباب السابع.

الفصل الأول

المعاينة العشوائية

RANDOM SAMPLING

تعتمد معظم الدراسات فى كافة مجــالات الحيــاة الاقتصــادية والسياسية والاجتماعية على أسلوب العينة بدلاً مــن أســلوب الحصــر الشامل، حيث لا يمنع استخدام أسلوب العينة من التوصل إلــى حقــائق كثيرة عن المجتمع الذى سحبت منه العينة وذلك من خلال تحليل نتــائج العينة.

وقد يتبادر إلى الذهن أن أسلوب العينة اقل كفاءة مــن أســلوب الحصر الشامل إلا أن ذلك عكس الحقيقة، فأسلوب العينة يحقــق نتــائج أكثر دقة وكفاءة من النتائج التى تتحقق باستخدام أسلوب الحصر الشامل.

ولاشك أن دراسة أية ظاهرة يستلزم الإلمــام بمبــادئ نظريــة العينات وخاصة المتعلقة بنوع العينــة الواجــب اســتخدامها والأدوات الإحصائية المناسبة للاستخدام.

وهناك بعض التعاريف والمصطلحات التى يتطلب الأمر الإلمام بها قبل دارسة موضوع العينات.

المجتمع Population:

والمجتمع يقصد به إحصائيا جميع المشاهدات المشاهدات الممكنة عن متغير ما، أو مجموعة المفردات التى تجمعها صفات أو خصــائص معينة.

والمجتمع قد يكون محدود Finite إذا أمكن حصر وتحديد جميع مفرداته مثل عدد طلبة الكلية، عدد السيارات التى تنتجها شركة النصر، عدد المنازل، عدد الفنادق،.....

أو يكون مجتمع غير محدود Infinite أى لا يمكـــن حصـــر أو تحديد جميع مفرداته مثل عدد طيور أو عدد الأسماك أو عدد الحيوانات أو...

العينة Sample

وهى جزء من المجتمع يتم اختيارها بطريقـــة معينـــة بغـــرض دراسة خصائص المجتمع، وهناك أنواع عديدة من العينـــات ولا يتســـع المجال لتناولها.

طريقة المعاينة Sampling Method

ويقصد بها الطريقة التى تستخدم فى اختيار مفـــردات العينـــة، وكذلك الطريقة أو الأسلوب المتبع فى حساب معالم العينة.

وحدة المعاينة Sampling Unit

ويقصد بها المفردة التى نسجل عنها البيانات الخاصة بالظـــاهرة محل الدارسة، ومجموع هذه الوحـــدات (المفـــردات) تمثـــل المجتمـــع المطلوب دراسته، وقد تكون وحدة المعاينة الأسرة أو الفرد أو المنشأة أو الفدان أو....

الإطار Frame

وهو عبارة عن قائمة تضم جميع مفـــردات المجتمـــع وطريقـــة الوصول إلى كل مفردة، فإذا كانت وحدة المعاينة هى الأسرة مثلاً، فـــإن الإطار عبارة عن قائمة تضم كافة الأسر فى المجتمع وعناوينهـــا، وقـــد

يكون الإطار عبارة عن سجلات أو دفاتر معدة لأغراض أخـرى مثـل دليل التليفون أو سجلات المواليد أو الوفيات بمكاتب الصحة، ومعنى ذلك أن الإطار عبارة عن المصدر الذى تؤخذ منه العينة، ويجب أن تتـوافر شروط معينة فى الإطار حتى يكون صالحاً للاستخدام كأن يكون محتوياً على جميع مفردات المجتمع وان يكون حديثاً بقدر الإمكان لضمان شموله لكافة المفردات، كما يجب أن يكون به وسيلة للتعرف على مكان وحدات المجتمع.

خطأ التحيز Bias Error

وهذا الخطأ ينتج أثناء جمع البيانات سـواء بأسـلوب الحصـر الشامل أو بأسلوب العينة، ويرجع هذا الخطأ فى أغلبـه إلـى قصـور القائمين بعملية جمع البيانات (الباحثين) عن إتباع القواعـد الإحصـائية السلمية أثناء عملية الجمع أو التحليل.

ولكى نفهم المقصود بخطأ التحيز نضرب مثالاً مبسطاً بمجتمـع عدد أفراده يساوى ١٠ ولحساب متوسط عمر الفرد فى المجتمع (μ) تـم حصر أعمارهم من خلال شهادات الميلاد فوجد أن متوسط العمـر ٢٥ سنة، وبفرض انه تم سؤالهم عن أعمارهم شفوياً فأعطوا أعمارا تقريبية تبين من خلالها أن متوسط العمر ٢٤ سنة مثلاً أو ٢٧ سنة، فـإن هـذا الاختلاف (بالنقص أو بالزيادة) يعرف بخطأ التحيز.

الخطأ العشوائى أو خطأ الصدفة أو خطأ العينة

Random Error

وهو ينشأ بسبب استخدام أسلوب العينة وهو عبارة عن الفـرق بين التقدير من خلال العينة والقيمة الحقيقية فى المجتمع.

فى المثال السابق بفرض أن الأعمار الحقيقية لأفراد المجتمع (العشــرة) كانت كما يلى:

٢١ ٢٦ ٢٢ ٢٤ ٢٥ ٢٨ ٣٠ ٢٥ ٢٩ ٢٠

ومن ثم فإن متوسط العمر فى المجتمع μ = ٢٥

فإذا اخترنا عينة من مفردين تم سحبهما بطريقة عشوائية وبفرض أنهما:

الأولى والثانية فإن متوسط العمر $\overline{\text{س}}$ = ٢٣,٥

التاسعة والعاشرة فإن متوسط العمر $\overline{\text{س}}$ = ٢٤,٥

الثانية والرابعة فإن المتوسط $\overline{\text{س}}$ = ٢٥ وكذلك الثالثة والسادسة.

ويلاحظ أن هناك تفاوتاً بين متوسط العينة الأولى والثانية عن متوسـط المجتمع وهو ما يعرف بالخطأ العشوائى أو خطأ الصدفة، مع ملاحظـة أنه من الممكن أن يكون متوسط العينة مساوياً لمتوسط المجتمـع مثـل العينة الثالثة والرابعة، وأنه كلما زاد حجم العينة قل الخطأ العشوائى، فلو أننا اخترنا عينة من ٤ مفردات مثلاً وكانت هى الأربعة الأولـى فـإن متوسط العمر = ٢٣,٢٥ سنة فإذا أضفنا المفردة الخامسة ارتفع متوسط العمر إلى ٢٣,٦ سنة، وبالمثل لو أضفنا المفردة السادسة ارتفع متوسـط العمر إلى ٢٤,٣٣ سنة وهكذا بزيادة حجم العينة يقترب المتوسـط مـن متوسط المجتمع ٢٥ سنة.

وهناك عوامل تؤثر فى قيمة الخطأ العشوائى مثل حجم العينـة وتبـاين المجتمع وطريقة اختيار مفردات المجتمع.

تحديد حجم العينة Sampling Size Determination

من الأمور الهامة جداً لأى باحث تحديد حجم العينة لما لذلك من تأثير كبير على دقة النتائج التى نتوصل إليها، فكما سبق أن أشرنا فإنـه

كلما زاد حجم العينة كلما اقتربت تقديرات العينة من المعـــالم الحقيقيـــة للمجتمع، مع التأكيد على أن هذه الدقة المنشودة يقابلها ارتفاع فى التكلفة وزيادة فى الجهد والوقت المطلوب لجمع وفحص مفردات العينة وتحليل نتائجها.

ولا ننسى أن صغر حجم العينة يعنى أنها لا تمثل المجتمع بدرجة كافيـــة مما يترتب عليه انخفاض درجة الدقة فى التقديرات.

وهناك مجموعة من المعايير التى تحكم عملية تحديد حجم العينة وهى:

١- درجة تجانس مفردات العينة Degree of Homogeneity

فكلما كانت مفردات المجتمع متجانسة أى أقل تشتتاً كلما أمكن تخفـــيض حجم العينة، أما إذا كان تشتت المجتمع كبيراً استلزم الأمر زيادة حجـــم العينة حتى نضمن تمثيل خصائص المجتمع، ومن ثم فإن هناك علاقـــة طردية بين تباين المجتمع ($\delta^{٢}$) وحجم العينة (ن).

٢- درجة الدقة المطلوبة فى التقدير Degree of Precision

كلما كانت الرغبة فى تحقيق تقديرات ذات دقة عالية كلمـــا كـــان مـــن الضرورى زيادة حجم العينة والعكس صحيح، ودرجة الدقة Precision يقصد بها أقصى فرق مطلق بين التقدير فى العينة ($\overline{س}$) والقيمة الحقيقية للمجتمع (μ) أى $|\ \overline{س} - \mu\ |$ وذلك فى توزيع المعاينة للوسط الحسابى.

٣- درجة الثقة أو مستوى الثقة فى التقدير الذى نحصـــل عليـــه مـــن العينة:

سواء كنا نستخدم العينة لتقدير متوسط المجتمع (μ) أو نسبة حدث فـــى المجتمع (ل) فإن هذا التقدير لابد أن يكون بدرجة ثقة معينة وقد جـــرت العادة على استخدام درجات ثقة ٩٠%، ٩٥%، ٩٩% وهى التى يقابلها

درجات معيارية (ى): ١,٦٥، ١,٩٦، ٢,٥٨ على الترتيب وإن كانت النسبة الأولى أقل استخداماً من النسبتين الأخيرتين. وفى ضوء المعايير الثلاثة السابقة يمكن وضع صيغة رياضية لحجم العينة سواء كان هدفنا استخدامها لحساب متوسط المجتمع (μ) أو استخدامها فى حساب نسبة حدث فى المجتمع (ل)، كما سنبين لاحقاً.

المعاينة مع الإحلال Sampling with Replacement

ويقصد بها الأسلوب المتبع فى عملية سحب مفردات العينة حيث يتم السحب مفردة مفردة على أن تعاد المفردة بعد تسجيل بياناتها مرة أخرى إلى المجتمع ، ويتم خلطها جيداً مع باقى المفردات قبل السحب مرة تالية وهكذا ، وهذا يعنى أن أن المفردة يمكن أن يتم اختيارها أكثر من مرة ومن ثم فإن احتمال سحب أى مفردة من مجتمع عدد مفرداته (ن) = $\frac{١}{ن}$

المعاينة بدون الإحلال Sampling without Replacement

وتتلخص فى أن المفردة التى يتم سحبها من المجتمع لا تعاد مرة أخرى إلى المجتمع وبالتالى فإن احتمالات السحب تختلف من مفردة لأخرى لأن احتمال سحب المفردة الأولى = $\frac{١}{ن}$ واحتمال سحب المفردة الثانية = $\frac{١}{ن-١}$ و المفردة الثالثة = $\frac{١}{ن-٢}$ وهكذا

توزيع المعاينة Sampling Distribution

يختلف عدد العينات التى يمكن سحبها من المجتمع باختلاف طريقة السحب هل هى بدون إحلال أم مع الإحلال.

١- عدد العينات التى يمكن سحبها من مجتمع فى حالة السحب بدون إحلال = $^{ن}ق_{ن}$ حيث **ن** حجم المجتمع ، ن حجم العينة.

فإذا كان حجم المجتمع **ن** =١٠٠، وحجم العينة المطلوب سحبها ن =٢ فإن عدد العينات التى يمكن سحبها بدون إحلال

$$= {}^{١٠٠}ق_{٢} = \frac{١٠٠ \times ٩٩}{٢ \times ١} = ٤٩٥٠ \text{ عينة}$$

٢- عدد العينات التى يمكن سحبها من مجتمع فى حالة السحب مع الإحلال= $ن^{ن}$

فى الحالة السابقة فان عدد العينات التى يمكن سحبها مع الإحلال $= ١٠٠^{٢} = ١٠٠٠٠$ عينة

فإذا قمنا بحساب مقياس إحصائى معين مثل الوسط الحسابى أو التباين أو نسبة حدث لنتج عدداً من هذه الإحصاءات يساوى عدد العينات التى يمكن سحبها من المجتمع مع ملاحظة أن الوسط الحسابى (مثلاً) يختلف من عينة، لأخرى، على الرغم من تساوى عدد مفردات كل عينة وذلك لاختلاف تركيب كل عينة، فإذا تم تحويل هذه الأوساط الحسابية إلى توزيع تكرارى لنتج ما يعرف بتوزيع المعاينة للوسط الحسابى، كذلك بالنسبة للتباين هناك توزيع معاينة للتباين وبالمثل يوجد توزيع معاينة للنسب.

وهذه التوزيعات لها خصائص إحصائية هامة جداً وهى الأسس التى تقوم عليها نظرية النهاية المركزية.

نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem

وهذه النظرية تقضى بما يلى:

١- إذا كان (س) متغير عشوائى يتبع توزيع طبيعى توقعه μ وتباينه δ^{2} فإن المتغير العشوائى ($\overline{س}$) (أى متوسطات العينات) الناتج من توزيع المعاينة يكون له أيضاً توزيع طبيعى توقعه μ وتباينه $\frac{\delta^{2}}{ن}$ إذا كان المجتمع غير محدود أو المعاينة مع الإحلال.

أما إذا كان المجتمع محدود أو المعاينة بدون إحلال فان تباينه يصبح

$\frac{\delta^{2}}{ن} \times \frac{ن - ن}{ن - ١}$ سواء كان حجم العينة صغيراً أم كبيراً.

والمقدار $\frac{ن - ن}{ن - ١}$ يسمى معامل تصحيح المجتمعات المحدودة وقيمته =١ فى المجتمعات غير المحدودة وإذا كان حجم العينة فى المجتمعات المحدودة (ن) أقل من ٥% من حجم المجتمع (**ن**) فإننا نهمل هذا المعامل.

٢- إذا كان (س) متغير عشوائى غير معلوم توزيعه الاحتمالى أو له توزيع احتمالى يختلف عن التوزيع الطبيعى (ذو الحدين- بواسون- ..) فإن المتغير العشوائى ($\overline{س}$) الناتج عن توزيع المعاينة يكون له توزيع طبيعى توقعه μ وتباينه $\frac{\delta^{2}}{ن}$ إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب يتم مع الإحلال أو تباينه $\frac{\delta^{2}}{ن} \times \frac{ن - ن}{ن - ١}$ إذا كان المجتمع

محدود أو السحب يتم بدون إحلال بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً ($ن \leq ٣٠$).

٣- توزيع النسب المحسوبة من جميع العينات العشوائية $\hat{ل}$ يكون قريباً من التوزيع الطبيعى توقعه ل وتباينه $\frac{ل(١-ل)}{ن}$ بشرط أن تكون النسبة فى المجتمع (ل) تتراوح بين ٥% ، ٩٥% بمعنى ألا تقل عن ٥% ولا تزيد عن ٩٥% (٥% ≤ ل ≤ ٩٥%).

أما إذا كانت النسبة فى المجتمع أقل من ٥% أو أكبر من ٩٥% فإن توزيع المعاينة للنسب $\hat{ل}$ يقترب من التوزيع الطبيعى بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً ($ن \leq ٣٠$) وأن يكون توزيع المتغير العشوائى (س) فى المجتمع يتبع توزيع ذو الحدين.

٤- لكى تتم الاستفادة من خصائص التوزيع الطبيعى، كما سبق واشرنا – لابد أن نحول قيم المتغير العشوائى (س) أو ($\overline{س}$) أو ($\hat{ل}$) إلى قيم معيارية (ى) كما يلى:

١) إذا كان (س) متغير عشوائى يتبع توزيع طبيعى توقعه μ وتباينه $\delta^{٢}$ فإن: $ى = \frac{س-\mu}{\delta}$

٢) إذا كان ($\overline{س}$) متغير عشوائى يتبع توزيـــع طبيعـــى توقعـــه μ

وتباينه $\frac{\delta^{٢}}{ن}$ فإن: $ى = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}}$

إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال

أو $ى = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}} \times \frac{ں - ن}{ں - ١}}$

إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال ونسبة العينة إلى

المجتمع $\frac{ن}{ں} \geq ٠,٠٥$.

٣) إذا كان ($\overline{س}$) متغير عشوائى غير معلوم توزيعه الاحتمـــالى أو يتبع توزيع احت مالى غير التوزيع الطبيعى فإن ($\overline{س}$) تقتـــرب من التوزيع الطبيعى طالما كان حجم العينـــة كبيـــراً (ن $\geq$ ٣٠) ويتم استخدام القيمة المعيارية (ى) كما فى الحالة السابقة (٢).

٤) إذا كان ($\hat{ل}$) متغير عشوائى يتبع توزيع طبيعى توقعه ل وتباينه $\frac{ل(١ - ل)}{ن}$ (المجتمع غير المحدود) فإن:

$ى = \frac{\hat{ل} - ل}{\frac{ل(١ - ل)}{ن}}$ ٠,٥ $\leq$ ل $\leq$ ٠,٩٥

فإذا كانت ل < ٠,٠٥ أو > ٠,٩٥فإننا نســتخدم نفــس القيمــة المعيارية بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً (ن ≤ ٣٠)

أما إذا كان المجتمع محدود فإن:

$$ى = \frac{\hat{ل} - ل}{\sqrt{\frac{ل\,(١ - ل)}{ن} \times \frac{ں - ن}{ں - ١}}}$$ بشرط أن $\frac{ن}{ں} \leq ٠,٠٥$

هام جداً:

١- لاحظ أننا فى كل الحالات السابقة كان هناك شرطاً أساسياً أن يكون حجم العينة كبيراً (ن ≤ ٣٠) ولكن ما هو الحل إذا كانت (ن < ٣٠) فى هذه الحالة فإننا لا نستطيع استخدام دالة التوزيع الطبيعى بل نلجأ إلى توزيع آخر يسمى توزيع ت t- Distribution حيث تتحول قيم المتغير العشوائى (س أو $\bar{س}$ أو $\hat{ل}$) إلى قيمة معيارية ت كما سنبين فيما بعد.

٢- الانحراف المعيارى للتبــاينات الســابقة يعرف بالخطأ العشــوائى خ($\bar{س}$) Random Error.

مثال(١): إذا كان وزن الطالب فى كلية التجارة يتبــع توزيعــاً طبيعيــاً بمتوسط ٦٥ كجم وانحراف معيارى ١٠كجم، سحبت عينة من ٢٥ طالب فما هو احتمال أن يكون متوسط الوزن فيما أقل من ٦٨ كجم.

الحـــــل

μ = ٦٥ δ = ١٠ ن = ٢٥

المطلوب أن ح (<$\bar{س}$ ٦٨)

حيث أن س تتبع توزيعاً طبيعياً فإن $\bar{\text{س}}$ سوف تتبع التوزيـــع الطبيعـــى ومن ثم يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعى فى تحويل $\bar{\text{س}}$ إلى ى حيث:

$$\text{ح}\left(\bar{\text{س}} < ٦٨\right) = \text{ح}\left(\text{ى} < \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ى} < \frac{٦٨ - ٦٥}{\frac{١٠}{\sqrt{٢٥}}}\right) = \text{ح}\left(\text{ى} < ١,٥\right) = ٠,٩٣٣٢$$

لاحظ أن حجم المجتمع (**ن**) غير معلوم ولذلك تم التعامل على أساس انه مجتمع غير محدود.

مثال (٢): إذا كان متوسط إنتاج الفدان من الــذرة ٢٨ أردب بـــانحراف معيارى ١٠ أردب. اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠ فــدان، فمـــا هـــو احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ٢٥ ، ٣٠ أردب.

الحـــــل

لم يتحدد التوزيع الاحتمالى لإنتاج الفدان من الذرة فى المجتمع وحيث أن حجم العينة > ٣٠ فانه يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعى على أساس أن $\bar{\text{س}}$ سوف تتبع توزيع طبيعى.

$\bar{\text{س}} = ٢٨$ $\quad \delta = ١٠$ $\quad \text{ن} = ١٠٠$ $\qquad \text{ح}\left(٢٥ \leq \bar{\text{س}} \leq ٣٠\right)$

$$\text{ح}\left(٢٥ \leq \bar{\text{س}} \leq ٣٠\right) = \text{ح}\left(\frac{٢٥-٢٨}{\frac{١٠}{\sqrt{١٠٠}}} \leq \text{ى} \leq \frac{٣٠-٢٨}{\frac{١٠}{\sqrt{١٠٠}}}\right)$$

$$= \text{ح}\left(-٣ \leq \text{ى} \leq ٢\right)$$

= ح (ى ≤ ٢) − ح (ى ≤ −٣)

= ح (ى ≤ ٢) − [١ − ح (ى ≤ ٣)]

= ٠,٩٧٧٢ − [١ − ٠,٩٩٨٧]

= ٠,٩٧٧٢ − ٠,٠٠١٣ = ٠,٩٧٥٩

مثال (٣): إذا كانت أطوال الطلبة فى كلية التجارة تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ١٦٥ سم وانحراف معيارى ١٥سم فإذا كان عدد طلاب الكلية ٢٠ ألف طالب تم تقسيمهم إلى ١٠٠٠ عينة كل عينة ٢٠ طالب. احسب عدد العينات التى يقل متوسط طول الطالب فيها عن ١٧٠ سم، وعدد العينات التى يتراوح متوسط طول الطالب فيها بين ١٦٠سم ، ١٧٥سم.

الحـــــل

ن = ٢٠٠٠٠ ن= ٢٠ μ = ١٦٥ δ = ١٥

عدد العينات التى يقل متوسط طول الطالب فيها عن ١٧٠ سم.

لحساب عدد العينات نحسب أولاً الاحتمال:

$$\text{ح}\,(\bar{\text{س}} < ١٧٠) = \text{ح}\left(\text{ى} < \frac{١٧٠ - ١٦٥}{\frac{١٥}{\sqrt{٢٠}}}\right)$$

= ح (ى < ١,٤٩) = ٠,٩٣١٩

∴ عدد العينات التى يقل متوسط طول الطالب فيها عن ١٧٠ سم

= ١٠٠٠ × ٠,٩٣١٣ = ٩٣١,٩ = ٩٣٢ عينة

عدد العينات التى يتراوح متوسط طول الطالب فيها بين ١٦٠ ، ١٧٥ سم:

$$\text{ح}\,(١٦٠ \leq \bar{\text{س}} \leq ١٧٠) = \text{ح}\left(\frac{١٦٠-١٦٥}{\frac{١٥}{\sqrt{٢٠}}} \leq \text{ى} \leq \frac{١٧٥-١٦٥}{\frac{١٥}{\sqrt{٢٠}}}\right)$$

= ح (-١,٤٩ ≥ ى ≥ ٢,٩٨)

= ح (ى ≥ ٢,٩٨) – ح (ى ≥ -١,٤٩)

= ح (ى ≥ ٢,٩٨) – [١ – ح (ى ≥ ١,٤٩)]

= ٠,٩٩٨٦ – [١ – ٠,٩٣١٩]

= ٠,٩٩٨٦ – ٠,٦٨١ = ٠,٩٣٠٥

∴ عدد العينات التى يتراوح متوسط طول الطالب فيها بين ١٦٠سم ، ١٧٥ سم = ١٠٠٠ × ٠,٩٣٠٥ = ٩٣١ عينة تقريباً.

لاحظ أننا أهملنا ضرب الخطأ العشوائى $\frac{\delta}{\sqrt{ن}}$ فى معامل التصحيح للمجتمعات المحدودة $\frac{ن - ن}{ن - ١}$ لأن نسبة العينة إلى المجتمع أقل من ٠,٠٥.

مثال (٤): تم إجراء اختبار على ١٠٠٠ عبوة من إنتاج احد مصانع تعبئة الشاى فى احد شهور السنة فتبين أن متوسط وزن العبوة ٢٥,٣ جرام بانحراف معيارى ٣,٨ جرام، فإذا اخترنا عينة من١٠٠ عبوة احسب ما يلى:

١- احتمال ألا يزيد متوسط وزن العبوة فى العينة عن ٢٦ جرام.

٢- احتمال أن يتراوح مجموع أوزان هذه العبوات المائة بين ٢٤٠٠ جرام، ٢٦٠٠ جرام.

٣- احتمال أن يبلغ مجموع أوزان هذه العبوات أكثر من ٢٧٠٠ جرام.

الحــــل

ن = ١٠٠٠ ن = ١٠٠ μ = ٢٥,٣ δ = ٣,٨

التوزيع الاحتمالى للمجتمع غير معلوم، ن > ٣٠ ∴ يمكن استخدام التوزيع الطبيعى مع استخدام معامل التصحيح لأن نسبة العينة إلى المجتمع أكبر من ٠,٠٥ (٠,١٠)

١- احتمال ألا يزيد متوسط وزن العبوة فى العينة عن ٢٦ جرام.

$$\text{ح}(\bar{\text{س}} \leq ٢٧) = \text{ح}\left(\text{ى} \leq \frac{٢٦ - ٢٥,٣}{\frac{٣,٨}{\sqrt{١٠٠}} \times \sqrt{\frac{١٠٠٠ - ١٠٠}{١٠٠٠ - ١}}}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ى} \leq \frac{٠,٧}{٠,٣٨ \times \sqrt{\frac{٩٠٠}{٩٩٩}}}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ى} \leq \frac{٠,٧}{٠,٣٦١}\right)$$

$$= \text{ح}(\text{ى} \leq ١,٩٤) = ٠,٩٧٣٨$$

٢- احتمال أن يتراوح مجموع أوزان هذه العبوات بين ٢٤٠٠ جرام ، ٢٦٠٠جرام:

نحول مجموع الأوزان إلى متوسط أوزان بالقسمة على حجم العينة.

$$\text{ح}(٢٤٠٠ \leq ١٠٠ \times \bar{\text{س}} \leq ٢٦٠٠)$$

$$= \text{ح}\left(\frac{٢٤٠٠}{١٠٠} \leq \bar{\text{س}} \leq \frac{٢٦٠٠}{١٠٠}\right) = \text{ح}(٢٤ \leq \bar{\text{س}} \leq ٢٦)$$

$$= \text{ح}\left(\frac{٢٤ - ٢٥,٣}{٠,٣٦١} \leq \text{ى} \leq \frac{٢٦ - ٢٥,٣}{٠,٣٦١}\right)$$

= ح (-٣,٦ ≤ ى ≤ ١,٩٤)

= ح (ى ≤ ١,٩٤) – ح (ى ≤ -٣,٦)

= ح (ى ≤ ١,٩٤) – [١ – ح (ى ≤ ٣,٦)]

= ٠,٩٧٣٨ – [١ – ٠,٩٩٩٨]

= ٠,٩٧٣٨ – ٠,٠٠٠٢ = ٠,٩٧٣٦

٣- احتمال أن يزيد مجموع أوزان هذه العبوات عن ٢٧٠٠ جرام:

$$\text{ح}\left(\overline{\text{س}} > \frac{٢٧٠٠}{١٠٠}\right) = \text{ح}\left(\overline{\text{س}} > ٢٧\right) = \text{ح}\left(\text{ى} > \frac{٢٧ - ٢٥,٣}{٠,٣٦١}\right)$$

= ح (ى > ٤,٧١) = ٠,٩٩٩٩٧

مثال (٥): ألقيت قطعة نقود ١٥٠ مرة، احسب الاحتمالات التالية:

١- احتمال أن تظهر الصورة فيما لا يزيد على ٤٠% من عدد المرات.

٢- احتمال أن تظهر الصورة ٤٥% ، ٦٥% من عدد المرات.

٣- احتمال أن تظهر الصورة فى ٦٠% أو أكثر من عدد المرات.

الحـــــل

عملية إلقاء قطعة النقود ١٥٠ مرة تعبر عن عينة من عدد لا نهائى من المرات لمجتمع جميع الرميات.

نسبة المجتمع ل = ٠,٥.

١- احتمال أن تظهر الصورة فيما لا يزيد على ٤٠% من عدد المرات:

$$\text{ح}\left(\hat{\text{ل}} \le ٠{,}٤٠\right) = \text{ح}\left(\text{ى} \le \frac{\hat{\text{ل}} - \text{ل}}{\sqrt{\dfrac{\text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{ن}}}}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ى} \le \frac{٠{,}٤٠ - ٠{,}٥٠}{\sqrt{\dfrac{٠{,}٥٠ \times ٠{,}٥٠}{١٥٠}}}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ى} \le \frac{-٠{,}١}{٠{,}٠٤١}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ى} \le -٢{,}٤٤\right)$$

$$= ١ - \text{ح}\left(\text{ى} \le ٢{,}٤٤\right)$$

$$= ١ - ٠{,}٩٩٢٧ = ٠{,}٠٠٧٣$$

٢- احتمال أن تظهر الصورة بين ٤٥%، ٦٥% من عدد المرات:

$$\text{ح}\left(٠{,}٤٥ \le \hat{\text{ل}} \le ٠{,}٦٥\right)$$

$$= \text{ح}\left[\frac{٠{,}٤٥ - ٠{,}٥٠}{٠{,}٠٤١} \le \text{ى} \le \frac{٠{,}٦٥ - ٠{,}٥٠}{٠{,}٠٤١}\right]$$

$$= \text{ح}\left(-١{,}٢٢ \le \text{ى} \le ٣{,}٦٦\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ى} \le ٣{,}٦٦\right) - \text{ح}\left(\text{ى} \le -١{,}٢٢\right)$$

= ح (ى ≤ ٣,٦٦) – [١ – ح (ى ≤ ١,٢٢)]

= ٠,٩٩٩٨٧ – [١ – ٠,٨٨٨٨]

= ٠,٩٩٩٨٧ – ٠,١١١٢٠

= ٠,٨٨٨٦٧

٣– احتمال أن تظهر الصورة فى ٦٠% أو أكثر من عدد المرات:

$$ح\ (\hat{ل} \geq ٠,٦٠) = ح \left[ى \geq \frac{٠,٦٠ - ٠,٥٠}{٠,٠٤١} \right]$$

= ح (ى ≥ ٢,٤٤)

= ١ – ح (ى ≤ ٢,٤٤)

= ١ – ٠,٩٩٢٧ = ٠,٠٠٧٣

معامل تصحيح النسبة:

سبق أن أشرنا عند استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذو الحدين إلى أن الاحتمالات الناتجة عن استخدام دالة التوزيع الطبيعى أقل من تلك المحسوبة وفقاً لدالة توزيع ذو الحدين، ومن ثم كان لزاماً أن نقوم بإجراء تصحيح لطريقة الحساب أطلق عليه تصحيح ياتس حيث تم طرح (س ≥) أو جمع ٠,٥ (س ≤) من أو إلى س عند حساب القيمة المعيارية (ى).

وبنفس المفهوم، ونظراً لأن توزيع ذو الحدين توزيع منفصل، والتوزيع الطبيعى توزيع متصل فإن معامل التصحيح للنسبة يكون بإضافة أو طرح القيمة $\frac{١}{٢ن}$ حيث (ن) حجم العينة

مثال (٦): المطلوب إعادة حل المثال السابق باستخدام معامل التصحيح للنسبة.

الحـــل

ن = ١٥٠ ∴ معامل التصحيح = $\frac{١}{٢ \times ١٥٠}$ = ٠,٠٠٣

١- احتمال أن تظهر الصورة فيما لا يزيد على ٤٠% من عدد المرات:

$$ح (\hat{ل} \leq ٠,٤٠) = ح \left(ى \leq \frac{(٠,٤٠ + ٠,٠٠٣) - ٠,٥}{٠,٠٤١} \right)$$

= ح (ى ≤ −٢,٣٧)

= ١ − ح (ى ≤ ٢,٣٧)

= ١ − ٠,٩٩١١ = ٠,٠٠٨٩

٢- احتمال أن تظهر الصورة بين ٤٥%، ٦٥% من عدد المرات:

$$ح (٠,٤٥ \leq \hat{ل} \leq ٠,٦٥)$$

$$= ح \left(\frac{(٠,٤٥ - ٠,٠٠٣) - ٠,٥}{٠,٠٤١} \leq ى \leq \frac{(٠,٦٥ + ٠,٠٠٣) - ٠,٥}{٠,٠٤١} \right)$$

= ح (−١,٢٩ ≤ ى ≤ ٣,٧٣)

= ح (ى ≥ ٣,٧٣) – ح (ى ≥ -١,٢٩)

= ح (ى ≥ ٣,٧٣) – [١ – ح (ى ≥ ١,٢٩)]

= ٠,٩٩٩٩٠ – [١ – ٠,٩٠١٤٧]

= ٠,٩٩٩٩٠ – ٠,٠٩٨٥٣ = ٠,٩٠١٣٧

٣- احتمال أن تظهر الصورة فى ٦٠% أو أكثر من عدد المرات:

ح (≤ل̂ ٠,٦٠) = ح (ى ≤ ((٠,٦٠ + ٠,٠٠٣) – ٠,٥) / ٠,٠٤١)

= ح (ى ≤ ٢,٣٧)

= ١ – ح (ى ≥ ٢,٣٧)

= ١ – ٠,٩٩٩١١ = ٠,٠٠٠٨٩

لاحظ أن استخدام معامل التصحيح أدى إلى زيادة قيمة الاحتمال.

الفصل الثانى

نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع

Estimation Theory – Estimating a Population Parameters

مقدمة:

لاشك أن الهدف من دراسة العينات هو الوصول إلى بعض الحقائق عن المجتمع الذى سحبت منه العينة، والتقديرات التى يمكن استخلاصها من بيانات العينة كثيرة من أهمها الوسط الحسابى ($\overline{س}$) ونسبة حدث معين ($\hat{ل}$) ويتم استخدامهما فى تقدير معالم المجتمع المقابلة أى الوسط الحسابى للمجتمع (μ) ونسبة حدث معين فى المجتمع (ل).

ولاشك أن هناك احتمال لاختلاف القيم المحسوبة من العينة عن القيم الحقيقية للمجتمع، ويتوقف مقدار هذا الاختلاف على حجم العينة. والارتباط بين مقدار الاختلاف وحجم العينة ارتباطاً عكسياً.

ويتم تقدير معالم المجتمع إما بنقطة أو بفترة ثقة.

التقدير بنقطة Point Estimation

ويعنى أن أى تقدير يتم حسابه من خلال العينة يعتبر ممثلاً للقيمة الحقيقية المناظرة له فى المجتمع، بمعنى أن متوسط العينة ($\overline{س}$) يعتبر تقديراً لمتوسط المجتمع (μ)، وكذلك تباين العينة ($ع^2$) يعتبر تقديراً لتباين المجتمع (δ^2) وبالمثل فإن نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$) تعتبر تقديراً لنسبة الحدث فى المجتمع (ل).

التقدير بفترة ثقة Confidence Interval Estimation

لاشك أن اعتبار أن متوسط العينة ($\overline{س}$) تقدير مناسب لمتوسط المجتمع (μ) أو ما أشرنا إليه بالتقدير بنقطة، يطرح تساؤلاً هاماً فماذا لو سحبنا عينة أخرى بنفس حجم العينة الأولى، وكان لها وسطاً حسابياً مختلفاً عن الوسط الحسابى للعينة الأولى، فأى المتوسطين يعتبر تقديراً مناسباً لمتوسط المجتمع، وبالطبع سيظل التساؤل مطروحاً لو سحبنا العديد من العينات المتساوية وحسبنا من خلالها الوسط الحسابى وكان لدينا المتوسطات: $\overline{س}_١$، $\overline{س}_٢$، $\overline{س}_٣$،...، $\overline{س}_ن$ فأى هذه المتوسطات يعتبر تقديراً مناسباً لمتوسط المجتمع (μ).

والإجابة على هذا التساؤل تكمن فى إيجاد حدود أو مدى أو فترة من القيم يمكن أن تقع بداخلها القيمة الحقيقية للمجتمع (μ) فبدلاً من أن نقول أن متوسط المجتمع يساوى قيمة معينة (وفقاً لأسلوب التقدير بنقطة) فإنه من الأفضل أن نقول أن متوسط المجتمع يقع بين قيمتين (حد أدنى وحد أعلى).

والوصول إلى قيمة هذين الحدين يكون من خلال نظرية النهاية المركزية.

أولاً: تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة ($\overline{س}$):

١- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (δ):

سبق أن أشرنا إلى أنه من خلال نظرية النهاية المركزية فإن القيمة المعيارية (ى) تحسب من خلال العلاقة:

$$ى = \frac{\overline{س} - \mu}{خ(\overline{س})} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}}$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعى المعيارى نجد أن المساحة المحصورة (الاحتمال) بين ى ≤ -١,٩٦، ى ≥ ١,٩٦ تساوى ٩٥% من المساحة الكلية أسفل المنحنى الطبيعى أى أن ح (-١,٩٦ ≥ ى ≥ ١,٩٦)= ٠,٩٥

أى أن

$$\text{ح}\left(-\text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \le \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}} \le \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left(-\text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \le \bar{\text{س}} - \mu \le \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left(-\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \le -\mu \le -\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left[-\left(\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) \le -\mu \le -\left(\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right)\right] = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left(\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \ge \mu \ge \bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\boxed{\text{ح}\left(\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \le \mu \le \bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto}$$

وهذه العلاقة عبارة عن تقدير لمتوسط المجتمع (μ) بفترة ثقة أو درجة ثقة $\text{١} - \propto$

ويكون الحد الأدنى لفترة الثقة لمتوسط المجتمع $\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}$

والحد الأعلى لفترة الثقة لمتوسط المجتمع $\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}$

ويمكن أن نضع تقدير الوسط الحسابى للمجتمع فى الصورة التالية:

$$\mu = \bar{س} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$$

وهذه العلاقة تكون صحيحة فى الحالتين:

- أن يكون المتغير يتبع توزيعاً طبيعياً مهما كان حجم العينة.
- أن يكون المتغير يتبع توزيعاً آخر بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً ($ن \leq 30$).

٢- تقدير متوسط المجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع):

إذا كان انحراف المجتمع (δ) مجهولاً يمكن استخدام الانحراف المعيارى للعينة (ع) لحساب الخطأ العشوائى لمتوسط العينة حيث:

$$ع = \sqrt{\frac{1}{ن - 1}\left(مجـ س^{2} - \frac{(مجـ س)^{2}}{ن}\right)}$$

وهنا لابد أن نفرق بين حالتين:

١- إذا كان حجم العينة كبيراً ($ن \leq 30$)

فإن التوزيع الاحتمالى لمتوسط العينة ($\bar{س}$) يعتبر توزيع طبيعى ومن ثم نستخدم القيمة المعيارية (ى) فى تقدير حدى الثقة لمتوسط المجتمع.

$$\mu = \bar{س} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

٢- إذا كان حجم العينة صغيراً (ن < ٣٠):

فى هذه الحالة فإن التوزيع الاحتمالى لمتوسط العينة ($\overline{س}$) سوف يتبع توزيع (ت)، ومن ثم نستخدم القيمة المعيارية الجدولية (ت) بدلاً من القيمة (ى) لتقدير حدى الثقة لمتوسط المجتمع:

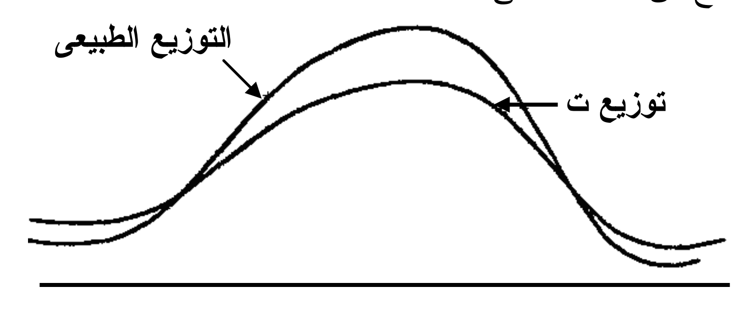
$$\mu = \overline{س} \pm ت_{(ن-١، \frac{\propto}{٢})} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

$ت_{(ن-١، \frac{\propto}{٢})}$ هى قيمة ت الجدولية بدرجات حرية = ن-١ ونصف مستوى المعنوية.

وتجدر الإشارة إلى أن كل العلاقات السابقة لتقدير متوسط المجتمع خاصة بمجتمعات غير محدودة أو أن السحب مع الإحلال، وفى حالة المجتمعات المحدودة أو أن السحب بدون إحلال فإنه يتم ضرب الخطأ العشوائى(المقام) ×معامل التصحيح $\sqrt{\frac{N - ن}{N - ١}}$ بشرط أن تكون $\frac{ن}{N}$ ≤ ٠,٠٥ وبالطبع فإنه من الضرورى أن نتعرف على توزيع (ت) بصورة موجزة.

توزيع (ت) Student – t distribution

وهو توزيع احتمالى لمتغير عشوائى متصل يشبه التوزيع الطبيعى حيث أن توزيع (ت) متماثل حول محوره الرأسى إلا أنه أكثر تسطحاً أى تفرطحاً ومن ثم تقع قمته أسفل قمة التوزيع الطبيعى، كما يتضح من الشكل التالى:



ويعتمد شكل توزيع (ت) على حجم العينة (ن) فكلما زاد حجم العينة (ن تقترب من ٣٠) كلما خفت حدة تفرطح المنحنى، وأخذ فى التحدب حتى يقترب من شكل المنحنى الطبيعى، وقد ثبت أن التوزيع الاحتمالى لتوزيع الأوساط الحسابية للعينات الصغيرة، فى حالة عدم معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع، له توزيع (ت) بشرط أن تكون المشاهدات الأصلية فى المجتمع لها توزيع طبيعى.

فإذا كان حجم العينة = ٢٥ فإن درجات الحرية = ٢٤

فإذا استخدمنا مستوى معنوية $\propto$ = ٥% مثلاً فإننا نحصل على قيمة $ت_{(٢٤، ٠,٠٢٥)}$ من الجدول أمام درجات حرية ٢٤ وتحت مستوى معنوية ٠,٠٢٥ (نصف مستوى المعنوية $\frac{\propto}{٢}$ أو تحت درجة ثقة ٠,٩٧٥ $\left(\text{٩٥\%} + \frac{\propto}{٢}\right)$.

$ت_{(٢٤، ٠,٠٢٥)} = ٢,٠٦٤$

ويلاحظ أن قيمة (ت) الجدولية تتناقص بزيادة درجات الحرية إلى أن تصل درجات الحرية إلى ∞ نجد أن قيمة (ت) الجدولية تساوى قيمة (ى) الجدولية. والدالة الاحتمالية لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية:

$$ح(س) = أ \left(١ + \frac{س^{٢}}{ن}\right)^{\frac{-ن+١}{٢}} \qquad -\infty \leq س \leq \infty$$

مثال (١): أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ طالب من الكلية فوجد أن متوسط عمر الطالب ٢٠ سنة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر الطالب فى الكلية ٤ سنوات. المطلوب تقدير متوسط عمر الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ٥%

الحـــــــل

$\overline{س} = ٢٠$ ن = ١٠٠ $\delta = ٤$ $\propto = ٠,٠٥$ $ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ١,٩٦$

متوسط عمر الطالب فى الكلية $(\mu) = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$

$= ٢٠ \pm ١,٩٦ \times \frac{٤}{\sqrt{١٠٠}}$

$= ٢٠ \pm ٠,٧٨٤$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عمر الطالب فى الكلية

= ٢٠ – ٠,٧٨٤ = ١٩,٢١٦ سنة

والحد الأعلى لمتوسط عمر الطالب فى الكلية

= ٢٠ + ٠,٧٨٤ = ٢٠,٧٨٤ سنة

أى أن متوسط عمر الطالب فى الكلية يتراوح بين ١٩ سنة و٣شهور، ٢٠سنة و٩ شهور (تقريباً) بدرجة ثقة ٩٥%

ومعنى ذلك أننا لو سحبنا ١٠٠ عينة وكل عينة مكونة من ١٠٠ طالب وحسبنا متوسط العمر فى كل عينة، وتم تقدير ١٠٠ فترة ثقة باستخدام متوسطات العينات المائة لوجدنا أن متوسط عمر الطالب فى الكلية (المجتمع) سيقع فى ٩٥ فترة ثقة من هذه الفترات المائة.

مثال (٢): سحبت عينة من ٢٠٠ طالب من طلبة إحدى الكليات العسكرية فوجد أن متوسط طول الطالب فى العينة ١٧٠سم بانحراف معيارى ١٥سم، المطلوب تقدير متوسط طول الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ١%

الحـــــل

$\bar{س}$ = ١٧٠   ن = ٢٠٠   ع = ١٥ $\propto$ = ١% $ى_{\frac{\propto}{2}}$ = ±٢,٥٨

متوسط طول الطالب فى الكلية (μ) = $\bar{س}$ ± $ى_{\frac{\propto}{2}}$ × $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$

لاحظنا أننا استخدمنا التوزيع الطبيعى المعيارى (ى) لأن ن ≥ ٣٠

= ١٧٠ ± ٢,٥٨ × $\frac{١٥}{\sqrt{٢٠٠}}$

= ١٧٠ ± ٢,٧٤

∴ الحد الأدنى لمتوسط طول الطالب فى الكلية

= ١٧٠ – ٢,٧٤ = ١٦٧,٢٦سم

والحد الأعلى لمتوسط طول الطالب فى الكلية

= ١٧٠ + ٢,٧٤ = ١٧٢,٧٤ سم

أى أن متوسط طول الطالب فى الكلية يتراوح بين ١٦٧,٢٦ سم، ١٧٣ سم بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): سحبت عينة عشوائية من ٢٥ شخص من مستخدمى مترو الأنفاق على خط معين، فوجد أن متوسط عدد أيام استخدامهم للمترو ٢٠ يوم شهرياً بانحراف معيارى ٧ أيام، المطلوب تقدير متوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً على هذا الخط بدرجة ثقة ٩٥%

الحـــــل

ن = ٢٥ $\bar{س}$ = ٢٠   ع = ٧ $\propto$ =٥% $ت_{(٢٤، ٠,٠٢٥)}$ =±٢,٠٦٤

انحراف المجتمع غير معلوم ∴ نستخدم توزيع (ت) حيث أن ن < ٣٠

متوسط عدد أيام الاستخدام (μ) = $\overline{س} \pm ت_{\left(ن-١، \frac{\infty}{٢}\right)} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

$= ٢٠ \pm ت_{(٢٤، ٠,٠٢٥)} \times \frac{٧}{\sqrt{٢٥}}$

$= ٢٠ \pm ٢,٠٦٤ \times \frac{٧}{\sqrt{٢٥}}$

$= ٢٠ \pm ٢,٨٩$

الحد الأدنى لمتوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً

$= ٢٠ - ٢,٨٩ = ١٧,١١$ يوم

والحد الأعلى لمتوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً

$= ٢٠ + ٢,٨٩ = ٢٢,٨٩$ يوم

ومعنى ذلك أن متوسط عدد أيام استخدام المترو تتراوح بين ١٧ يوم، ٢٣ يوم شهرياً بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٤): مصنع لإنتاج اللمبات الكهربائية ينتج ١٠٠٠٠ لمبة فلوريسنت سنوياً تم سحب عينة منها حجمها ٥٠٠ لمبة وتم اختبار ساعات تشغيلها فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٥٠٠ ساعة بانحراف معيارى ٣٠٠ ساعة، ماذا تستنتج عن متوسط عمر اللمبة من إنتاج المصنع عند مستوى معنوية ١%

الحـــــل

$\mathbf{ن}$=١٠٠٠٠ ن=٥٠٠ $\overline{س}$=١٥٠٠ ع = ٣٠٠ $\propto$=٠,٠١

$ى_{\frac{\propto}{٢}}$ =±٢,٥٨

انحراف المجتمع غير معلوم، ن ≥ ٣٠، ∴ نستخدم توزيع ى

ونظراً لأن المجتمع محدود وحجم العينة = ٠,٠٥ من حجم المجتمع

$\left(\frac{٥٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠,٠٥\right)$ فإننا نستخدم معامل التصحيح للخطأ العشوائى.

$$\text{متوسط عمر اللمبة فى المصنع } (\mu) = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ١}}$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٢,٥٨ \times \frac{٣٠٠}{\sqrt{٥٠٠}} \times \sqrt{\frac{١٠٠٠٠ - ٥٠٠}{١٠٠٠٠ - ١}}$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٢,٥٨ \times \frac{٣٠٠}{٢٢,٣٦} \times ٠,٩٧٥$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٣٣,٧٥$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عمر اللمبة فى المصنع = ١٥٠٠ – ٣٣,٧٥

= ١٤٦٦,٢٥ ساعة

والحد الأعلى لمتوسط عمر اللمبة فى المصنع = ١٥٠٠ + ٣٣,٧٥

= ١٥٣٣,٧٥ ساعة

أى أن متوسط عمر اللمبة فى المصنع يتراوح بين ١٤٦٦ ساعة ، ١٥٣٤ساعة تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%

مثال (٥): تم اختيار عينة من رواد أحد المطاعم الشهيرة حجمها ٢٠ فرد فوجد أن متوسط الدخل الشهرى للفرد ٢٧٠٠ جنيه بانحراف معيارى ٥٠٠جنيه، ماذا تستنتج عن متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد هذا المطعم عند درجة ثقة ٩٥% علماً بأن عدد رواد المطعم فى ذلك اليوم بلغ ٢٥٠ فرد.

الحـــــل

ن = ٢٥٠ ن = ٢٠ $\overline{س}$= ٢٧٠٠ ع = ٥٠٠ $\propto$ = ٠,٠٥

انحراف المجتمع غير معلوم، ن < ٣٠ ∴ نستخدم توزيع ت

وحيث أن المجتمع محدود وحجم العينة $\leq$ ٠,٠٥ ∴ نستخدم معامل التصحيح للخطأ العشوائى.

متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد المطعم (μ)

$$= \overline{س} \pm ت_{(ن - ١، \frac{\propto}{٢})} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\textbf{ن} - ن}{\textbf{ن} - ١}}$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢,٠٩ \times \frac{٥٠٠}{\sqrt{٢٠}} \times \sqrt{\frac{٢٥٠ - ٢٠}{٢٥٠ - ١}}$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢,٠٩ \times \frac{٥٠٠}{٤,٤٧٢} \times ٠,٩٦١$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢٢٤,٥٦$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط الدخل الشهرى

= ٢٧٠٠ – ٢٢٤,٥٦ = ٢٤٧٥,٤٤ جنيه

والحد الأعلى لمتوسط الدخل الشهرى

= ٢٧٠٠ + ٢٢٤,٥٦ = ٢٩٢٤,٥٦ جنيه

أى أن متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد المطعم يتراوح بين ٢٤٧٥، ٢٩٢٥ جنيه شهرياً بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٦): لدراسة متوسط عدد أفراد الأسرة فى إحدى المدن تم اختيار عينة من ١٠٠ أسرة فوجد أن متوسط عدد أفراد الأسرة ٥ أفراد بانحراف معيارى ٣ أفراد ماذا تستنتج عن متوسط عدد أفراد الأسرة فى هذه المدينة عند درجة ثقة ٩٩%

الحـــل

ن = ١٠٠ $\overline{\text{س}}$ = ٥   ع = ٣ $\propto$ = ٠,٠١ $ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢,٥٨$

انحراف المجتمع غير معلوم، ن $\leq$ ٣٠، $\therefore$ نستخدم توزيع ى

متوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة (μ) $= \overline{\text{س}} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

$$= ٥ \pm ٢,٥٨ \times \frac{٣}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$= ٥ \pm ٠,٧٧٤$$

$\therefore$ الحد الأدنى لمتوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة

= ٥ − ٠,٧٧٤ = ٤,٢٢٦ فرد

والحد الأعلى لمتوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة

= ٥ + ٠,٧٧٤ = ٥,٧٧٤ فرد

أى أن متوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة يتراوح بين ٤، ٦ أفراد تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%

حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ):

إذا تصورنا أننا بصدد سحب عينة عشوائية بهدف حساب وسط حسابى $\overline{س}$ على ألا تختلف هذه القيمة ($\overline{س}$) عن القيمة الحقيقية للوسط الحسابى للمجتمع (μ) إلا بما لا يتعدى عدد معين من الدرجات وهو ما سبق أن أشرنا إليه بدرجة الدقة (د) وهذا يعنى أننا نود أن يؤدى حجم العينة الذى نختاره إلى عدم الاختلاف فى قيمة الوسط الحسابى للعينة ($\overline{س}$) عن الوسط الحسابى للمجتمع (μ) إلا بمقدار ±د، أى أن:

$$\mu = \overline{س} \pm د$$

وبمقارنة هذه العلاقة بعلاقة متوسط المجتمع (μ) خلال متوسط العينة ($\overline{س}$) أى الثقة لمتوسط المجتمع:

$$\mu = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times خ(\overline{س})$$

فإن معنى ذلك أن:

$د = \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times خ(\overline{س})$ وقد سبق أن أشرنا إلى أنه:

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$خ(\overline{س}) = \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$$

وهذا يعنى أن:

$$د = \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$$

$$د^2 = ى^2_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta^2}{ن}$$

$$\text{ن} = \frac{\text{ى}^{2}_{\frac{\alpha}{2}} \times \delta^{2}}{\text{د}^{2}}$$

(ى) = ١,٩٦ عند درجة ثقة ٩٥%، ى = ٢,٥٨ عند درجة ثقة ٩٩%

(δ^{2}) تباين المجتمع وإذا كان مجهولاً يمكن استخدام تباين العينة (ع^{2}) بدلاً من δ^{2} مع ملاحظة أن:

$$\text{ع}^{2} = \frac{1}{\text{ن} - 1}\left(\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}\right)$$

(د) درجة الدقة فى التقديرات أو خطأ التقدير فى ($\overline{\text{س}}$) وهو خطأ يحدده الباحث مقدماً، وهو يختلف عن خطأ المعاينة خ($\overline{\text{س}}$) والذى يمثل الفرق بين متوسط عينة واحدة، ومتوسط المجتمع (مجهول غالباً) بينما درجة الدقة، كما سبق وأشرنا، فهى أقصى فرق مطلق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع من خلال عدد كبير جداً من العينات.

ن حجم العينة المقدر.

وإذا كنا نتوقع أن حجم العينة سيكون صغيراً (ن < ٣٠) فإنه يتم استخدام القيمة الجدولية (ت) بدلاً من القيمة (ى):

$$\text{ن} = \frac{\text{ت}^{2}_{\left(\text{ن} - 1،\ \frac{\alpha}{2}\right)} \times \delta^{2}}{\text{د}^{2}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدوداً أو السحب بدون إحلال فإن:

$$\text{خ}(\overline{\text{س}}) = \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{ن} - \text{ن}}{\mathbf{ن} - 1}}$$

ومن ثم فإن:

$$د = \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\text{ن} - ن}{\text{ن} - ١}}$$

$$د^{٢} = \pm ى^{٢}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\delta^{٢}}{ن} \times \frac{\text{ن} - ن}{\text{ن} - ١}$$

وبإجراء بعض العمليات الرياضية نصل إلى أن:

$$ن^{*} = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{\text{ن}}}$$

حيث $ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \delta^{٢}}{د^{٢}}$

مثال (١): أوجد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط الوزن لطلبة الكلية إذا كنا نرغب ألا يختلف هذا المتوسط عن المتوسط الحقيقى فى المجتمع بأكثر من ٣كجم وبدرجة ثقة ٩٥% إذا علمت أن الوزن متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى وتباينه ٥٠ كجم.

الحـــــل

$د = ٣ \quad\quad ١ - \alpha = ٩٥\% \quad\quad ى_{\frac{\alpha}{٢}} = \pm ١,٩٦ \quad\quad \delta^{٢} = ٥٠$

$$ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \delta^{٢}}{د^{٢}} = \frac{(١,٩٦)^{٢} \times (٥٠)^{٢}}{(٣)^{٢}} = ٢١ \text{ مفردة تقريباً}$$

ومعنى ذلك أنه إذا سحبنا عينة حجمها ٢١ مفردة فإننا نكون واثقين بدرجة ٩٥% أن متوسط وزن الطالب فى هذه العينة لن يختلف إلا

بمقدار ±٣ كجم عن متوسط الوزن الحقيقى فى المجتمع الذى سحبت منه العينة.

مثال (٢): مجتمع يتكون من ١٠٠٠٠ مفردة ما هو حجم العينة اللازم سحبه لتقدير الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير ($\overline{س}$) عن وحدتين وذلك بدرجة ثقة ٩٩%، علماً بأن الانحراف المعيارى فى عينة استطلاعية بلغ ١٠ وحدات.

الحـــل

ن = ١٠٠٠٠ د = ٢ ع = ١٠ ١−∝=٩٩% $ى_{\frac{\propto}{2}}$ = ±٢,٥٨

وحيث أن المجتمع محدود فإن:

$$ن^* = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{N}}$$

$$ن = \frac{ى_{\frac{\propto}{2}}^2 \times \delta^2}{د^2} = \frac{(٢,٥٨)^2 \times (١٠)^2}{(٢)^2} = ١٦٦ \text{ مفردة تقريباً}$$

ثم نقوم بعملية التصحيح لحجم العينة حيث أن المجتمع محدود

$$ن^* = \frac{١٦٦}{١ + \frac{١٦٦}{١٠٠٠٠}} = ١٦٣ \text{ مفردة تقريباً}$$

∴ حجم العينة اللازم = ١٦٣ مفردة.

ثانياً: تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$):

كما توصلنا لحدى فترة الثقة لمتوسط المجتمع (μ) باستخدام متوسط العينة ($\overline{س}$) يمكن أن نصل إلى حدى الثقة لنسبة حدث فى المجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$) كما يلى:

نسبة المجتمع = نسبة العينة ± القيمة المعيارية عند درجة ثقة (١ −∝)

× الخطأ المعيارى للتقدير

$$\text{ل} = \hat{\text{ل}} \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \times \text{خ}(\hat{\text{ل}})$$

١− إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$\text{خ}(\hat{\text{ل}}) = \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(١ - \hat{\text{ل}})}{\text{ن}}}$$

ومن ثم يصبح حدى الثقة لتقدير نسبة حدث فى المجتمع:

$$\text{ل} = \hat{\text{ل}} \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(١ - \hat{\text{ل}})}{\text{ن}}}$$

٢− إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال فإن:

$$\text{خ}(\hat{\text{ل}}) = \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(١ - \hat{\text{ل}})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - ١}}$$

ومن ثم فإن حدى الثقة لتقدير نسبة حدث فى المجتمع:

$$\text{ل} = \hat{\text{ل}} \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(١ - \hat{\text{ل}})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - ١}}$$

مثال (١): فى دراسة لمعرفة نسبة الأسر التى لديها جهاز فيديو فى إحدى المدن تم اختيار عينة من ٥٠٠ أسرة فوجد منها ٣٠٠ أسرة لديها جهاز فيديو، قدر بدرجة ثقة ٩٥% نسبة الأسر التى لديها جهاز فيديو فى هذه المدينة.

الحــــــل

ن = ٥٠٠ $\quad \hat{ل} = \frac{٣٠٠}{٥٠٠} = ٠,٦ \quad ١ - \alpha = ٩٥\% \quad ى_{\frac{\alpha}{٢}} = \pm ١,٩٦ \quad ل = ؟$

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}(١ - \hat{ل})}{ن}}$$

$$= ٠,٦ \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,٦ \times ٠,٤}{٥٠٠}}$$

$$= ٠,٦ \pm ٠,٠٤$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠,٦ – ٠,٠٤ = ٠,٥٦

الحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠,٦ + ٠,٠٤ = ٠,٦٤

ومعنى ذلك أن نسبة الأسر لديها جهاز فيديو فى هذه المدينة تتراوح بين ٥٦% ، ٦٤% بدرجة ثقة ٩٥%

مثال (٢): فى دراسة أعدها اتحاد الإذاعة والتليفزيون لمعرفة نسبة المشاهدة لأحد البرامج الجماهيرية الهامة تم سحب عينة من ١٠٠٠ أسرة من مدينة القاهرة تبين منها أن ٧٠٠ أسرة تتابع هذا البرنامج، المطلوب تقدير نسبة الأسر التى تتابع هذا البرنامج فى مدينة القاهرة بدرجة ثقة ٩٩%

الحـــــل

ن = ١٠٠٠ $\quad \hat{ل} = \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} = ٠,٧ \quad ١ - \alpha = ٩٩\%$

$ى_{\frac{\alpha}{٢}} = \pm ٢,٥٨ \quad ل = ؟$

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}(١ - \hat{ل})}{ن}}$$

$$= ٠,٧ \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,٧ \times ٠,٣}{١٠٠٠}}$$

$$= ٠,٧ \pm ٠,٠٤$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠,٧ – ٠,٠٤ = ٠,٦٦

والحد الأعلى فى المجتمع = ٠,٧ + ٠,٠٤ = ٠,٧٤

أى أن نسبة المشاهدين لهذا البرنامج فى مدينة القاهرة تتراوح بين ٦٦%، ٧٤% بدرجة ثقة ٩٩%

مثال (٣): لمعرفة نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة البالغ عددها ١٠٠٠٠ طالب تم سحب عينة من هؤلاء الطلبة حجمها ٢٠٠ طالب وجد من بينهم ٥٠ طالب حاصلون على تقدير جيد جداً أو ممتاز، قدر بدرجة ثقة ٩٥% نسبة الطلاب الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء.

الحـــــل

$\textbf{ن} = ١٠٠٠٠$، ن = ٢٠٠ $\hat{ل} = \frac{٥٠}{٢٠٠} = ٠,٢٥$ $١ - \propto = ٩٥\%$

$ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ١,٩٦$

$\frac{ن}{\textbf{ن}} = \frac{٢٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠,٠٢$ على الرغم من أن المجتمع محدود إلا أن

نسبة العينة < ٠,٠٥ وبالتالى يمكن إهمال معامل التصحيح.

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\ (١ - \hat{ل})}{ن}}$$

$$= \text{٠,٢٥} \pm \text{١,٩٦} \times \sqrt{\frac{\text{٠,٢٥} \times \text{٠,٧٥}}{\text{٢٠٠}}}$$

$$= \text{٠,٢٥} \pm \text{٠,٠٦}$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠,٢٥ – ٠,٠٦ = ٠,١٩

والحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠,٢٥ + ٠,٠٦ = ٠,٣١

أى أن نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة بالكلية تتراوح بين ١٩%، ٣١% بدرجة ثقة ٩٥%

مثال (٤): فى المثال السابق بفرض أنه تم سحب عينة من ٦٠٠ طالب وجد من بينهم ١٦٢ طالب حاصلون على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء المطلوب تقدير نسبة الحاصلين على هذا التقدير فى مادة الإحصاء بدرجة ثقة ٩٩%

$\frac{\text{٦٠٠}}{\text{١٠٠٠٠}}$

الحـــــــل

$\mathbf{ن} = \text{١٠٠٠٠}$ $ن = \text{٦٠٠}$ $\hat{ل} = \frac{\text{١٦٢}}{\text{٦٠٠}} = \text{٠,٢٧}$ $\frac{ن}{\mathbf{ن}} = \frac{\text{٦٠٠}}{\text{١٠٠٠}} =$

٠,٠٦

$\text{١} - \alpha = \text{٩٩\%}$ $ى_{\frac{\alpha}{٢}} = \pm \text{٢,٥٨}$

المجتمع محدود ونسبة العينة > ٠,٠٥، ∴ نستخدم معامل التصحيح.

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(\text{١} - \hat{ل})}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - \text{١}}}$$

$$= \text{٠,٢٧} \pm \text{٢,٥٨} \times \sqrt{\frac{\text{٠,٢٧} \times \text{٠,٧٣}}{\text{٦٠٠}} \times \frac{\text{١٠٠٠٠} - \text{٦٠٠}}{\text{١٠٠٠٠} - \text{١}}}$$

$$ل = \text{٠,٢٧} \pm \text{٠,٠٤٥}$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠,٢٧ – ٠,٠٤٥ = ٠,٢٢٥

والحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠,٢٧ + ٠,٠٤٥ = ٠,٣١٥

ومعنى ذلك أن نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة تتراوح بين ٢٢,٥% ، ٣١,٥% بدرجة ثقة ٩٩%

حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل):

سبق أن توصلنا عند تحديد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع إلى أن:

درجة الدقة = القيمة المعيارية عند درجة ثقة (١ – ∝) × الخطأ المعيارى للتقدير

$$د = ى_{\frac{\propto}{٢}} \times خ(\hat{ل})$$

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$خ(\hat{ل}) = \sqrt{\frac{ل\ (١ - ل)}{ن}}$$

$$د = ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \sqrt{\frac{ل\ (١ - ل)}{ن}}$$

$$د^{٢} = ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{ل\ (١ - ل)}{ن}$$

$$ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times ل\ (١ - ل)}{د^{٢}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال فإن:

$$خ(\hat{ل}) = \sqrt{\frac{ل\,(١ - ل)}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ١}}$$

$$د = ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{ل\,(١ - ل)}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ١}}$$

$$د^{٢} = ى^{٢}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{ل\,(١ - ل)}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ١}$$

وبإجراء بعض العمليات الرياضية نصل إلى أن:

$$ن^{*} = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{\mathbf{ن}}}$$

مع ملاحظة أن استخدام نسبة حدث فى المجتمع (ل) فى حساب حجم العينة يعتبر أمراً يصعب تحقيقه فى أغلب الأحوال، لذلك نفترض أن هذه النسبة ٠,٥ حتى نحصل على أكبر حجم للعينة.

وإذا كانت النسبة فى المجتمع تأخذ مدى معين كأن يكون من المتوقع عند دراسة مستوى الأمية فى مجتمع ما أن تتراوح بين ٢٠%، ٤٠%، فى هذه الحالة تؤخذ النسبة الأقرب إلى ٥٠% أى (ل = ٠,٤٠)

وتجدر الإشارة إلى أن هناك جداول تبين أقصى حجم ممكن للعينة بدلالة درجة الدقة المطلوبة للنسبة ل وبدلالة درجة الثقة (١ – α)

مثال (١): إذا علمت أن عدد طلاب الكلية ٣٠٠٠٠ طالب، ما هو حجم العينة اللازم سحبها لتقدير نسبة الطلبة الذين يزيد عمرهم عن ٢٠ سنة إذا كان هناك اعتقاد بأن هذه النسبة تتراوح بين ١٥%، ٣٠% من طلبة الكلية، بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢% وبدرجة ثقة ٩٥%

الحـــــل

ن = ٣٠٠٠٠ ل تتراوح بين ١٥% ، ٣٠%

ل = ٠,٣٠ لأنها الأقرب إلى ٠,٥٠

د = ٠,٠٢ $\quad$ ١ − $\propto$ = ٩٥% $\quad$ ى $_{\frac{\propto}{٢}}$ = ١,٩٦

$$ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times ل\,(١ - ل)}{د^{٢}} = \frac{(١,٩٦)^{٢} \times ٠,٣ \times ٠,٧}{(٠,٠٢)^{٢}}$$

= ٢٠١٧ طالب

وحيث أن حجم المجتمع معلوم ∴ لابد من إجراء عملية التصحيح لحجم العينة

$$ن^{*} = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{\mathbf{ن}}} = \frac{٢٠١٧}{١ + \frac{٢٠١٧}{٣٠٠٠٠}} = ١٨٩٠ \text{ طالب}$$

مثال (٢): ما هو حجم العينة اللازم سحبه من إحدى المدن لتقدير نسبة الأمية فيها بشرط أن تكون درجة الدقة فى هذه النسبة فى حدود ٣% وبدرجة ثقة ٩٩%.

الحـــــل

د = ٠,٠٣   ل = ٠,٥ (لأن نسبة المجتمع غير معلومة)

١ − ∝ = ٩٩% $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ٢,٥٨

$$ن = \frac{ى^2_{\frac{\alpha}{2}} \times ل\ (١ - ل)}{د^2} = \frac{(٢,٥٨)^2 \times ٠,٥ \times ٠,٥}{(٠,٠٣)^2}$$

= ١٨٤٩ شخص

ثالثاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$)

يمكن إيجاد فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين من خلال سحب عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_1$، ووسطها الحسابى $\overline{س}_1$ وعينة من المجتمع الثانى حجمها $ن_2$، ووسطها الحسابى $\overline{س}_2$ وباستخدام الفرق بين متوسطى العينتين يمكن تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين كما يلى:

الفرق بين متوسطى مجتمعين = الفرق بين متوسطى عينتين ± القيمة المعيارية عند درجة ثقة (١ − ∝) × الخطأ المعيارى

١ − التباين للمجتمعين δ_1^2، δ_2^2 معلومين:

$$\mu_1 - \mu_2 = (\overline{س}_1 - \overline{س}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\delta_1^2}{ن_1} + \frac{\delta_2^2}{ن_2}}$$

نستخدم القيمة المعيارية (ى) مهما كان حجم العينتين طالما كانت الظاهرة محل الدراسة تتبع التوزيع الطبيعى، وإذا كانت تتبع توزيعاً آخر نستخدم (ى) أيضاً بشرط أن $ن_1$، $ن_2 \geq ٣٠$.

٢ − التباين للمجتمعين مجهولين:

فى هذه الحالة نستخدم التباين للعينين $ع_1^2$ ، $ع_2^2$

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) \pm ى_{\frac{\infty}{2}} \times \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

نستخدم القيمة المعيارية (ى) بشرط أن تكون $ن_1$، $ن_2 \geq 30$.

أما إذا كانت $ن_1$ ، $ن_2$ < ٣٠ فإننا نستخدم القيمة المعيارية (ت) بدلاً من (ى).

حيث $ت_{(ن_1 + ن_2 - 2،\ \frac{\infty}{2})}$ أى بدرجات حرية = مجموع العينتان – ٢ ونصف مستوى المعنوية.

والعلاقات السابقة صحيحة طالما كان المجتمعان غير محدودين أو أن السحب منهما يتم مع الإحلال.

أما إذا كان المجتمعان محدودين أو أن السحب يتم بدون إحلال فإننا نستخدم معامل التصحيح:

$$\sqrt{\frac{\text{ن} - ن}{\text{ن} - 2}}$$ حيث $\text{ن} = \text{ن}_1 + \text{ن}_2$ ، $ن = ن_1 + ن_2$

ويمكن كتابته على الصورة التالية:

$$\frac{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - (ن_1 + ن_2)}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - 2}$$

بشرط أن تكون:

$$\frac{ن_1 + ن_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} \leq 0,05$$

مثال (١): فى دراسة لمعرفة متوسط استهلاك الكهرباء فى بعض مدن الجمهورية، تم سحب عينة من مدينة القاهرة حجمها ٢٠٠ أسرة فوجد أن

متوسط استهلاك الأسرة ١٥٠ كيلووات شهرياً بانحراف معيارى ٥٠ كيلووات، وسحبت عينة من مدينة بنها حجمها ١٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الأسرة ٩٠كيلووات شهرياً بانحراف معيارى ٣٠ كيلووات. المطلوب، تقدير الفرق بين متوسطى استهلاك الأسرة من الكهرباء شهرياً بين المدينتين وبدرجة ثقة ٩٥%.

الحـــل

القاهرة: $ن_١ = ٢٠٠$ ، $\overline{س}_١ = ١٥٠$ $ع_١ = ٥٠$

بنها : $ن_٢ = ١٠٠$ ، $\overline{س}_٢ = ٩٠$ $ع_٢ = ٣٠$

$ن_١، ن_٢ \geq ٣٠$ ∴ نستخدم القيمة المعيارية (ى)

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (١٥٠ - ٩٠) \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{(٥٠)^٢}{٢٠٠} + \frac{(٣٠)^٢}{١٠٠}}$$

$$= ٦٠ \pm ١,٩٦ \times ٤,٦٣٧$$

$$= ٦٠ \pm ٩,١$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٦٠ - ٩,١ = ٥٠,٩$ كيلووات

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٦٠ + ٩,١ = ٦٩,١$ كيلووات

ومعنى ذلك أن الفرق بين متوسط استهلاك الأسرة من الكهرباء شهرياً فى مدينة القاهرة ومتوسط استهلاك الأسرة فى مدينة بنها يتراوح بين ٥١، ٦٩ كيلووات تقريباً.

مثال (٢): فى دراسة لمعرفة متوسط عمر اللمبات الكهربائية فى بعض المصانع، تم سحب عينة من المصنع (أ) حجمها ٥٠٠ لمبة فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٣٠٠ ساعة، وسحبت عينة من المصنع (ب) حجمها ٤٠٠ لمبة فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٥٠٠ ساعة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر اللمبة فى المصنع (أ) ٢٠٠ ساعة وفى المصنع (ب) ١٥٠ ساعة، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط عمر اللمبة فى المصنعين عند مستوى معنوية ١%.

الحـــــل

المصنع (أ): $ن_١ = ٥٠٠$ ، $\overline{س}_١ = ١٣٠٠$ $\delta_١ = ٢٠٠$

المصنع (ب): $ن_٢ = ٤٠٠$ ، $\overline{س}_٢ = ١٥٠٠$ $\delta_٢ = ١٥٠$

تبايناً المجتمعين معلومان ∴ نستخدم القيمة المعيارية (ى)

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\delta_١^٢}{ن_١} + \frac{\delta_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (١٣٠٠ - ١٥٠٠) \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{(٢٠٠)^٢}{٥٠٠} + \frac{(١٥٠)^٢}{٤٠٠}}$$

$= ٢٠٠ \pm ٢,٥٨ \times ١١,٦٧٣$ لاحظ أننا نأخذ الفرق المطلق (+)

$= ٢٠٠ \pm ٣٠,١١$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ - ٣٠,١١ = ١٦٩,٨٩$ ساعة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ + ٣٠,١١ = ٢٣٠,١١$ ساعة

أى أن الفرق بين متوسطى عمر اللمبة فى المصنعين يتراوح بين ١٧٠ ساعة، ٢٣٠ ساعة، وذلك بدرجة ثقة ٩٩%

مثال (٣): المطلوب حل المثال السابق بفرض أن إنتاج المصنع (أ) من هذه اللمبات ١٠٠٠٠ لمبة وإنتاج المصنع (ب) منها ٧٠٠٠ لمبة.

الحـــل

المجتمعان محدودان:

$\mathbf{ن}_1 = ١٠٠٠٠$ $\qquad$ $\mathbf{ن}_2 = ٧٠٠٠$ $\qquad$ $\mathbf{ن} = \mathbf{ن}_1 + \mathbf{ن}_2 = ١٧٠٠٠$

$ن_1 = ٥٠٠$ $\qquad$ $ن_2 = ٤٠٠$ $\qquad$ $ن = ن_1 + ن_2 = ٩٠٠$

النسبة $= \frac{٩٠٠}{١٧٠٠٠} = ٠,٠٥٣ \geq ٠,٠٥$ ∴ نستخدم معامل التصحيح

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{ن_1} + \frac{\delta_2^2}{ن_2} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ٢}}$$

$$= ٢٠٠ \pm ٢,٥٨ \sqrt{\frac{(٢٠٠)^2}{٥٠٠} + \frac{(١٥٠)^2}{٤٠٠} \times \frac{١٧٠٠٠ - ٩٠٠}{١٧٠٠٠ - ٢}}$$

$$= ٢٠٠ \pm ٢٩,٣$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ - ٢٩,٣ = ١٧٠,٧$ ساعة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ + ٢٩,٣ = ٢٢٩,٣$ ساعة

أى أن الفرق بين متوسط عمر اللمبة فى المصنعين يتراوح بين ١٧١، ٢٢٩ ساعة بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٤): فى دراسة لمعرفة متوسط درجات مادة الإحصاء لكل من الطلبة والطالبات سحبت عينة من الطلبة حجمها ٢٥ طالب فوجد أن متوسط درجاتهم فى مادة الإحصاء ١٦ درجة بانحراف معيارى درجة واحدة، وسحبت عينة من الطالبات حجمها ٢٠ طالبة فوجد أن متوسط درجاتهن فى مادة الإحصاء ١٤ درجة بانحراف معيارى درجتين، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط الدرجات فى مادة الإحصاء بين الطلبة والطالبات بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـــل

الطلبة : $ن_١ = ٢٥$ ، $\overline{س}_١ = ١٦$ $ع_١ = ١$

الطالبات: $ن_٢ = ٢٠$ ، $\overline{س}_٢ = ١٤$ $ع_٢ = ٢$

ن١، ن٢ < ٣٠ وتباينا المجتمعين مجهولان ∴ نستخدم توزيع (ت) بدلاً من التوزيع الطبيعى.

$$١ - \propto = ٠,٩٥ \quad ت_{\left(ن_١ + ن_٢ - ٢،\ \frac{\propto}{٢}\right)} = ت_{(٤٣،\ ٠,٠٢٥)} = ٢,٠٢١$$

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ت_{(٤٣،\ ٠,٠٢٥)} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (١٦ - ١٤) \pm ٢,٠٢١ \times \sqrt{\frac{(١)^٢}{٢٥} + \frac{(٢)^٢}{٢٠}}$$

$$= ٢ \pm ٢,٠٢١ \times ٠,٤٩ = ٢ \pm ١$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين = ٢ – ١ = ١ درجة واحدة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين = ٢ + ١ = ٣ درجات

أى أن الفرق بين متوسط درجات الطلبة والطالبات فى مادة الإحصاء يتراوح بين درجة واحدة وثلاث درجات بدرجة ثقة ٩٥%

مثال (٥): سحبت عينتان حجم كل منهما ١٠٠ عامل من مصنعين وكان توزيع هؤلاء العمال حسب فئات العمر كما يلى:

فئات العمر	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٥٥-٦٠	المجموع
عدد عمال المصنع (أ)	١٢	١٨	٣٨	٢٢	١٠	١٠٠
عدد عمال المصنع (ب)	٨	٢٢	٣٥	٢٧	٨	١٠٠

<u>المطلوب</u>: تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط عمر العامل فى المصنعين بدرجة ثقة ٩٩%.

الحــــــل

نبدأ أولاً بحساب كل من الوسط الحسابى والتباين لكل عينة

فئات	مراكز الفئات(س)	$ك_١$	س ك	$س^٢ك_١$	$ك_٢$	$س ك_٢$	$س^٢ك_٢$
٢٠-	٢٥	١٢	٣٠٠	٧٥٠٠	٨	٢٠٠	٥٠٠٠
٣٠-	٣٥	١٨	٦٣٠	٢٢٠٥٠	٢٢	٧٧٠	٢٦٩٥٠
٤٠-	٤٥	٣٨	١٧١٠	٧٦٩٥٠	٣٥	١٥٧٥	٧٠٨٧٥
٥٠-	٥٢,٥	٢٢	١١٥٥	٦٠٦٣٧,٥	٢٧	١٤١٧,٥	٧٤٤١٨٠,٧٥
٥٥-٦٠	٥٧.٥	١٠	٥٧٥	٣٣٠٦٣٠	٨	٤٦٠	٢٦٤٥٠
المجموع		١٠٠	٤٣٧٠	٢٠٠٢٠٠	١٠٠	٤٤٢٢,٥	٢٠٣٦٩٣,٧٥

$$\bar{\text{س}}_{١} = \frac{\text{مجـ س ك}_{١}}{\text{مجـ ك}_{١}} = \frac{٤٣٧٠}{١٠٠} = ٤٣,٧$$

$$\text{ع}_{١}^{٢} = \frac{١}{\text{مجـ ك}_{١} - ١}\left(\text{مجـ س}^{٢}\text{ ك}_{١} - \frac{(\text{مجـ س ك}_{١})^{٢}}{\text{مجـ ك}_{١}}\right)$$

$$= \frac{١}{٩٩}\left(٢٠٠٢٠٠ - \frac{(٤٣٧٠)^{٢}}{١٠٠}\right)$$

$$\text{ع}_{١}^{٢} = ٩٣,٢٤$$

$$\bar{\text{س}}_{٢} = \frac{\text{مجـ س ك}_{٢}}{\text{مجـ ك}_{٢}} = \frac{٤٤٢٢,٥}{١٠٠} = ٤٤,٢٢٥$$

$$\text{ع}_{٢}^{٢} = \frac{١}{\text{مجـ ك}_{١} - ١}\left(\text{مجـ س}^{٢}\text{ ك}_{٢} - \frac{(\text{مجـ س ك}_{٢})^{٢}}{\text{مجـ ك}_{٢}}\right)$$

$$= \frac{١}{٩٩}\left(٢٠٣٦٩٣,٧٥ - \frac{(٤٤٢٢,٥)^{٢}}{١٠٠}\right)$$

$$\text{ع}_{٢}^{٢} = ٨١,٩١$$

$$\mu_{١} - \mu_{٢} = (\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢}) \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\text{ع}_{١}^{٢}}{\text{ن}_{١}} + \frac{\text{ع}_{٢}^{٢}}{\text{ن}_{٢}}}$$

$$= (٤٣,٧ - ٤٤,٢٢٥) \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٩٣,٢٤}{١٠٠} + \frac{٨١,٩١}{١٠٠}}$$

$$= ٠,٥٢٥ \pm ٣,٤١٤$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٠,٥٢٥ - ٣,٤١٤ = ٢,٨٨٩$ سنة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٠,٥٢٥ + ٣,٤١٤ = ٣,٩٣٩$ سنة

ومعنى ذلك أن الفرق بين متوسط العمر للعاملين فى المصنعين يتراوح بين ٣ سنوات، ٤ سنوات تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%.

رابعاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين ($\text{ل}_{١} - \text{ل}_{٢}$):

إذا كان لدينا مجتمعين ونود معرفة الفرق بين نسبة حدث معين فى المجتمعين نسحب عينة من المجتمع الأول حجمها $\text{ن}_{١}$، ونحسب نسبة

الحدث فيها $\hat{ل}_1$، ونسحب عينة من المجتمع الثانى حجمها $ن_2$ ونحسب نسبة الحدث $\hat{ل}_2$ وبالتالى فإن حدى الثقة للفرق بين نسبتى حدث معين فى مجتمعين كما يلى:

$$ل_1 - ل_2 = (\hat{ل}_1 - \hat{ل}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}_1 (1-\hat{ل}_1)}{ن_1} + \frac{\hat{ل}_2 (1-\hat{ل}_2)}{ن_2}}$$

مع ملاحظة استخدام معامل التصحيح $\sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 2}}$ إذا كان المجتمعان محدودين أو أن السحب منهما يتم بدون إرجاع، حيث:

$\mathbf{ن} = \mathbf{ن}_1 + \mathbf{ن}_2$، $ن = ن_1 + ن_2$، ويشترط أن $\frac{ن_1 + ن_2}{\mathbf{ن}_1 + \mathbf{ن}_2} \leq 0,05$

مثال (١): لمعرفة نسبة الأمية فى بعض مدن الجمهورية سحبت عينة من ٣٠٠شخص من مدينة طنطا فوجد أن منها ٥٠ شخص أمياً، وسحبت عينة من ٢٠٠ شخص من مدينة المحلة الكبرى فوجد منها ٤٠ شخص أمياً، المطلوب تقدير فترة للفرق بين نسبة الأمية فى المدينتين بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـــــل

طنطا: $ن_1 = 300$ $\qquad$ $\hat{ل}_1 = \frac{50}{300} = 0,17$

المحلة الكبرى : $ن_2 = 200$ $\qquad$ $\hat{ل}_2 = \frac{40}{200} = 0,20$

$1 - \alpha = 95\%$ $\qquad$ $ى_{\frac{\alpha}{2}} = \pm 1,96$

$$ل_1 - ل_2 = (\hat{ل}_1 - \hat{ل}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}_1 (1-\hat{ل}_1)}{ن_1} + \frac{\hat{ل}_2 (1-\hat{ل}_2)}{ن_2}}$$

$$= (٠,٢٠ - ٠,١٧) \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,١٧ \times ٠,٨٣}{٣٠٠} + \frac{٠,٢٠ \times ٠,٨٠}{٢٠٠}}$$

$$= ٠,٠٣ \pm ١,٩٦ \times ٠,٠٣٥ = ٠,٠٣ \pm ٠,٠٧$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين نسبتى المجتمعين = ٠,٠٣ − ٠,٠٧ = −٠,٠٤

والحد الأعلى للفرق بين نسبتى المجتمعين = ٠,٠٣ + ٠,٠٧ = ٠,١٠

أى أن الفرق بين النسبتين يتراوح بين ٤% بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٢): لمعرفة نسبة الحاصلين على شهادة الثانوية العامة من المدارس الحكومية من طلبة السنة الأولى بالكلية نظامى وانتساب موجه سحبت عينة من طلبة النظامى حجمها ٥٠٠ طالب وجد من بينهم ٣٠٠ من طلبة المدارس الحكومية، وسحبت عينة من طلبة الانتساب الموجه حجمها ٣٥٠ طالب وجد منهم ١٥٠ طالب من المدارس الحكومية، فإذا علمت أن الطلبة المقبولين بالفرقة الأولى نظامى ٥٠٠٠ طالب، والمقبولين بالفرقة الأولى انتساب موجه ٤٠٠٠ طالب، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبة طلاب المدارس الحكومية الملتحقين بالفرقة الأولى نظامى وانتساب موجه بالكلية عند مستوى معنوية ١%.

الحـــــل

نظامى: $\mathbf{ن}_{١} = ٥٠٠٠$ $\quad ن_{١} = ٥٠٠$ $\quad \hat{ل}_{١} = \frac{٣٠٠}{٥٠٠} = ٠,٦$

انتساب موجه: $\mathbf{ن}_{٢} = ٤٠٠٠$ $\quad ن_{٢} = ٣٥٠$ $\quad \hat{ل}_{٢} = \frac{١٥٠}{٣٥٠} = ٠,٤٣$

$\mathbf{ن} = ٩٠٠٠$ $\quad ن = ٨٥٠$

المجتمعين محدودين ونسبة العينتين $\frac{ن_{١} + ن_{٢}}{\mathbf{ن}_{١} + \mathbf{ن}_{٢}} = \frac{٨٥٠}{٩٠٠٠}$

= ٠,٠٩٤ > ٠,٠٥

∴ نستخدم معامل التصحيح، α = ٠,٠١ ، $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ ± ٢,٥٨

$$ل_١ - ل_٢ = (\hat{ل}_١ - \hat{ل}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}_١ (١ - \hat{ل}_١)}{ن_١} + \frac{\hat{ل}_٢ (١ - \hat{ل}_٢)}{ن_٢} \times \frac{ن - ن}{ن - ٢}}$$

$$= (٠,٦٠ - ٠,٤٣) \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,٦٠ \times ٠,٤٠}{٥٠٠} + \frac{٠,٤٣ \times ٠,٥٧}{٣٥٠} \times \frac{٩٠٠٠ - ٨٥٠}{٩٠٠٠ - ٢}}$$

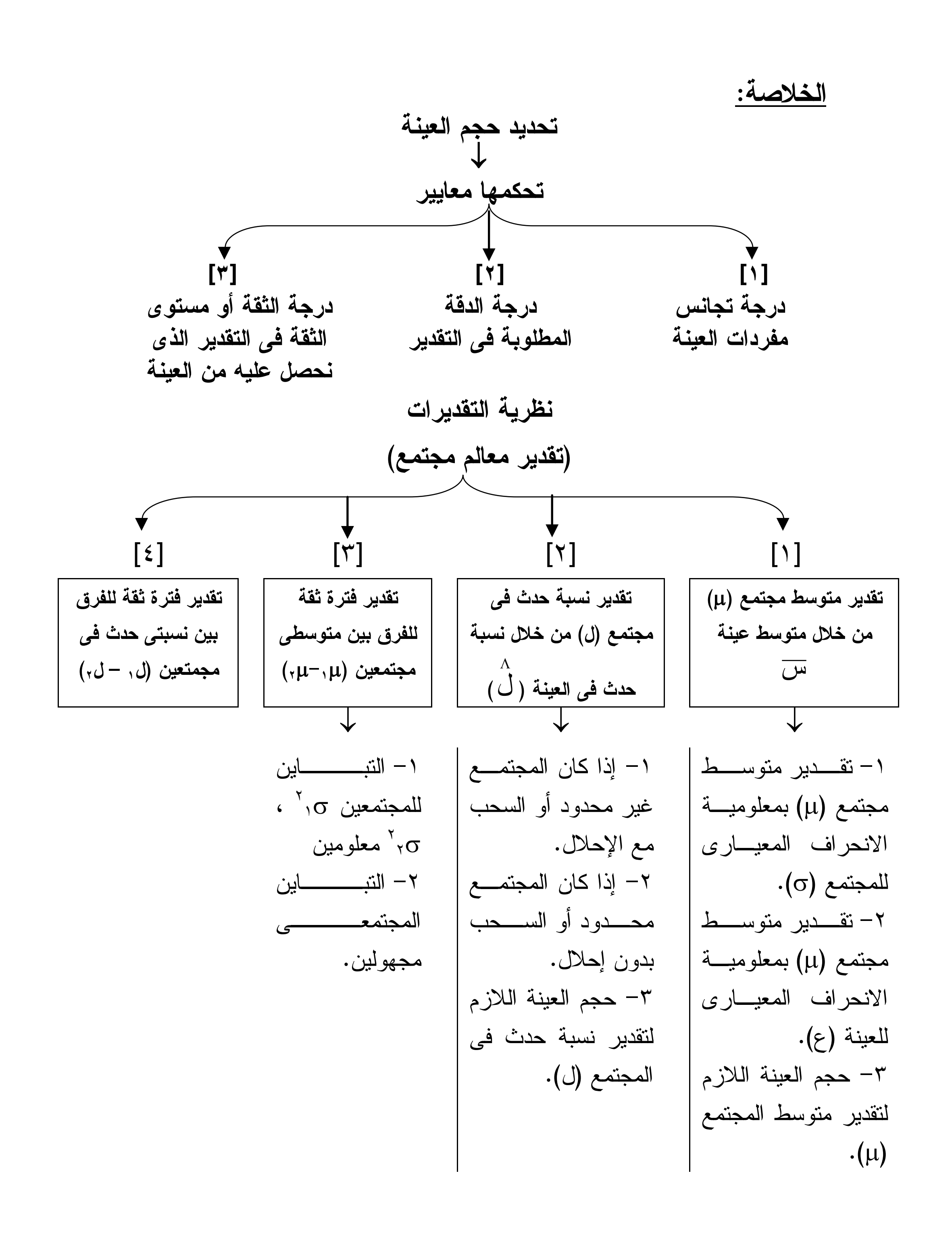
= ٠,١٧ ± ٢,٥٨ × ٠,٠٣٣ = ٠,١٧ ± ٠,٠٨

∴ الحد الأدنى للفرق بين نسبتى المجتمعين = ٠,١٧ − ٠,٠٨ = ٠,٠٩

والحد الأعلى للفرق بين نسبتى المجتمعين = ٠,١٧ + ٠,٠٨ = ٠,٢٥

أى أن الفرق بين نسبة طلبة المدارس الحكومية بين طلاب النظامى والانتساب الموجه بالفرقة الأولى فى الكلية يتراوح بين ٩% ، ٢٥% بدرجة ثقة ٩٩%.

الخلاصة:



تحديد حجم العينة
تحكمها معايير
[١] درجة تجانس مفردات العينة
[٢] درجة الدقة المطلوبة فى التقدير
[٣] درجة الثقة أو مستوى الثقة فى التقدير الذى نحصل عليه من العينة
نظرية التقديرات
(تقدير معالم مجتمع)
[١] تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة س̄
[٢] تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة (لˆ)
[٣] تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين (μ١-μ٢)
[٤] تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين (ل١ – ل٢)
١- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (σ).
٢- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع).
٣- حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ).
١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال.
٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال.
٣- حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل).
١- التباين للمجتمعين σ_1^2 ، σ_2^2 معلومين
٢- التباين المجتمعى مجهولين.

تمارين على نظرية العينات

١- إذا كان طول الطالب فى جامعة القاهرة يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ١٦٥سم وانحراف معيارى ١٥سم، سحبت عينة عشوائية من ١٠٠ طالب فما هو احتمال أن يبلغ متوسط الطول فى العينة ١٧٠سم على الأكثر.

٢- إذا كان متوسط إنتاج الفدان من القمح فى إحدى المحافظات ١٥ أردب بانحراف معيارى ٥ أردب، فإذا كان إنتاج القمح يتبع توزيعاً طبيعياً، اختيرت عينة عشوائية من ٢٠ فدان، فما هو احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١٣، ١٨ أردب.

٣- إذا كانت المساحة المزروعة بالقطن فى إحدى المحافظات ١٠٠ ألف فدان، وكان متوسط إنتاج الفدان ١٥ قنطار بانحراف معيارى ٩ قنطار، تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠ فدان احسب ما يلى:

أ- احتمال أن يبلغ متوسط إنتاج الفدان ١٢ قنطار على الأقل.

ب- احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١٣، ١٥ قنطار.

جـ- المساحة من هذه العينة التى يتراوح متوسط إنتاج الفدان فيها بين ١٥، ١٨ قنطار.

د- متوسط إنتاج الفدان الذى يزيد عنه متوسط إنتاج ٧٥% من المساحة المنزرعة.

٤- إذا كانت المساحة المزروعة بقصب السكر فى إحدى محافظات الوجه القبلى ٥٠٠ ألف فدان، وكان متوسط إنتاج الفدان ١٠٠٠ قنطار بانحراف معيارى ٧٠٠ قنطار، تم اختيار عينة عشوائية من ٢٠٠ فدان، احسب ما يلى:

أ- احتمال أن يبلغ متوسط إنتاج الفدان ٩٠٠ قنطار على الأكثر.

ب- احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١١٠٠، ١٢٠٠ قنطار.

جـ- المساحة من هذه العينة التى يتراوح متوسط إنتاج الفدان فيها بين ٨٠٠ قنطار، ١١٠٠ قنطار.

د- متوسط إنتاج الفدان الذى يقل عنه متوسط إنتاج ٣٠% من المساحة المزروعة.

٥- إذا كانت نسبة الإنتاج المطابق للمواصفات فى أحد المصانع ٨٥% فإذا تم سحب عينة عشوائية من ١٠٠ وحدة من إنتاج المصنع احسب ما يلى:

أ- احتمال أن تبلغ نسبة الوحدات المطابقة للمواصفات فى العينة ٧٥% على الأقل.

ب- احتمال أن تتراوح نسبة الوحدات المطابقة للمواصفات فى العينة بين ٧٠%، ٨٥%.

جـ- عدد الوحدات بالعينة التى يتراوح نسبة الوحدات المطابقة بين ٨٠%، ٩٠%.

٦- أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ عامل من أحد المصانع فوجد أن متوسط العمر ٣٥ سنة بانحراف معيارى ١٥ سنة، فإذا علمت أن العمر يتبع توزيعاً طبيعياً ماذا تستنتج عن متوسط عمر العامل فى المصنع بدرجة ثقة ٩٥%.

٧- أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٥ عامل من أحد المصانع فوجد أن متوسط الدخل الشهرى للعامل ٣٠٠ جنيه بانحراف معيارى ١٠٠ جنيه، فإذا علمت أن توزيع الدخل يقترب جداً من التوزيع الطبيعى.

المطلوب: تقدير فترة ثقة لمتوسط الدخل الشهرى للعامل فى هذا المصنع عند مستوى معنوية ١%.

٨- فى التمرين السابق بفرض أن عدد عمال المصنع ٣٥٠ عامل أوجد نفس المطلوب بدرجة ثقة ٩٥%.

٩- أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٠ طالب من إحدى قاعات الامتحان فوجد أن متوسط طول الطالب ١٦٨سم، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى للطول فى الكلية ١٥سم، وأن توزيع الطول يقترب جداً من التوزيع الطبيعى. المطلوب تقدير متوسط طول الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ٥%.

١٠- فى التمرين السابق إذا علمت أن عدد الطلاب بقاعة الامتحان ٣٠٠ طالب، المطلوب تقدير متوسط طول الطالب بدرجة ثقة ٩٩%.

١١- فى دراسة لمعرفة متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات أخذت عينة عشوائية من ١٠٠ فدان، فوجد أن متوسط إنتاج الفدان ٢٥ أردب، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لإنتاج الفدان من الذرة ٧ أردب، ماذا تستنتج عن متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى هذه المحافظة علماً بأن المساحة المزروعة بالذرة فى هذه المحافظة تبلغ ٥٠ ألف فدان (عند مستوى معنوية ١%).

١٢- فى دراسة لمعرفة متوسط إنتاج العامل فى مصانع السيراميك بمدينة السادس من أكتوبر سحبت عينة من ٣٠٠ عامل وجد أن متوسط الإنتاج اليومى للعامل يبلغ ٥٠ وحدة بانحراف معيارى ٣٠ وحدة. المطلوب تقدير متوسط إنتاج العامل فى مصانع السيراميك عند درجة ثقة ٩٩% علماً بأن عدد العمال فى تلك المصانع فى نفس مجال التخصص ٣ آلاف عامل.

١٣- أوجد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات إذا كنا نرغب ألا يختلف هذا المتوسط عن المتوسط الحقيقى فى المجتمع بأكثر من ٣ أردب وبدرجة ثقة

٩٩%، إذا علمت أن إنتاج الفدان من الذرة يتبع توزيعاً طبيعياً تباينه ٢٢٥ أردب.

١٤- إذا كان إجمالى المساحة المزروعة قطن فى إحدى المحافظات ٥٠ألف فدان ما هو حجم العينة اللازم سحبه لتقدير متوسط إنتاج الفدان من القطن بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى التقدير عن ٢ قنطار للفدان وذلك بدرجة ثقة ٩٥% إذا علمت أن الانحراف المعيارى لإنتاج الفدان من القطن فى عينة استطلاعية يبلغ ٧ قنطار.

١٥- فى دراسة لمعرفة نسبة الطلبة فى الكلية الذين لديهم جهاز كمبيوتر تم سحب عينة بين ٣٠٠ طالب وجد منهم ١٢٠ طالب لديهم جهاز كمبيوتر، قدر بدرجة ثقة ٩٩% نسبة الطلبة الذين لديهم جهاز كمبيوتر فى الكلية.

١٦- سحبت عينة عشوائية من طلبة الكلية من الفرقة الأولى حجمها ٥٠٠ طالب وجد أن نسبة طلاب الانتساب الموجه بها ٢٠% ماذا تستنتج عن نسبة هؤلاء الطلاب فى الكلية بدرجة ثقة ٩٥% علماً بأن عدد طلاب الفرقة الأولى ١٠٠٠٠طالب.

١٧- سحبت عينة عشوائية من طلبة الكلية مكونة من ٤٠٠ طالب فوجد أن نسبة الطلاب القادمين من مدارس حكومية تبلغ ٧٠% ماذا تستنتج عن نسبة هؤلاء الطلاب فى الكلية بدرجة ثقة ٩٩% علماً بأن عدد طلاب الكلية ٢٨٠٠٠طالب.

١٨- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من مجتمع عدد مفرداته ١٠٠٠ شخص لتقدير نسبة الأمية بينهم إذا كان هناك اعتقاد بأن نسبة الأمية فى المجتمع تتراوح بين ٤٥%، ٦٠% بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢% وبدرجة ثقة ٩٩%.

١٩- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من الكلية لتقدير نسبة الطلاب القادمين من مدارس حكومية إذا كان هناك اعتقاد أن تلك النسبة فى الكلية تتراوح بين ٦٠%، ٨٠% بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢,٥% وبدرجة ثقة ٩٥%.

٢٠- أوجد المطلوب فى التمرين السابق بفرض أن عدد طلاب الكلية ٢٨٠٠٠ طالب.

٢١- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من المجتمع لتقدير نسبة المتزوجين بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٣% وبدرجة ثقة ٩٩%.

٢٢- فى دراسة حول متوسط استهلاك الفرد من مياه الشرب على مستوى الجمهورية تم سحب عينة من مدينة القاهرة حجمها ٥٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الفرد ٥٠ لتر يومياً بانحراف معيارى ٢٠ لتر، كما تم سحب عينة من مدينة بنها حجمها ٣٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الفرد ٣٠ لتر يومياً بانحراف معيارى ١٠لتر. المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى استهلاك الفرد من المياه يومياً بين المدينتين بدرجة ثقة ٩٩%.

٢٣- فى دراسة حول متوسط عمر الفرد من المترددين على ملاعب كرة القدم على مستوى الجمهورية تم سحب عينة من ٥٠٠ فرد من ستاد طنطا فوجد أن متوسط عمر الفرد ٢٧ سنة، وتم سحب عينة من ٥٠٠فرد من ستاد المحلة الكبرى فوجد أن متوسط عمر الفرد ٢٣ سنة فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر الفرد من المترددين على ملاعب كرة القدم ١٥ سنة، قدر بدرجة ثقة ٩٥% الفرق بين متوسطى عمر الفرد بين المدينتين.

٢٤- فى دراسة لمعرفة الفرق بين متوسط الدخل الشهرى للعامل فى مصنعين تم سحب عينة من ٢٥ عامل من كل مصنع فكان توزيعهم وفقاً لفئات الدخل الشهرى كما يلى:

فئات الدخل الشهرى	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٨٠-٣٠٠	المجموع
عمال المصنع (أ)	٢	٥	٨	٧	٣	٢٥
عمال المصنع (ب)	١	٣	٧	١٠	٤	٢٥

قدر بدرجة ثقة ٩٩% الفرق بين متوسط الدخل الشهرى للعامل فى المصنعين.

٢٥- أوجد المطلوب فى التمرين السابق علماً بأن عدد العمال فى المصنع (أ) ٥٠٠ عامل وفى المصنع (ب) ٤٠٠ عامل.

٢٦- فى دراسة لمعرفة نسبة الإصابة بمرض البلهارسيا بين الفلاحين على مستوى الجمهورية سحبت عينة من ٥٠٠ فلاح فى محافظة المنوفية وبإجراء التحاليل اللازمة تبين إصابة ٣٥٠ فلاح بالبلهارسيا وسحبت عينة من ٤٠٠ فلاح فى محافظة أسيوط وبإجراء التحاليل تبين إصابة ٢٦٠ فلاح بالبلهارسيا. المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبة الإصابة بمرض البلهارسيا فى المحافظتين بدرجة ثقة ٩٥%.

٢٧- فى دراسة لمعرفة نسبة الإصابة بالفشل الكلوى على مستوى الجمهورية بين الذكور والإناث سحبت عينة عشوائية من الذكور وأخرى من الإناث حجم كل منها ٥٠٠ من إحدى القرى فتبين أن عدد المصابين بالفشل الكلوى ١٢٠ من الذكور، ٨٠ من الإناث فإذا علمت أن عدد سكان القرية ١٠ آلاف نسمة، قدر بدرجة ثقة ٩٩% الفرق بين نسبة الإصابة بالفشل الكلوى بين الذكور والإناث فى هذه القرية.



الباب الثامن

الاحصاء السكاني و الحيوي

الفصل الاول : مصطلحات وتعاريف أساسية

الفصل الثاني : الاحصاءات السكانية و الحيوية

الفصل الاول

مصطلحات وتعاريف أساسية

١ – **الاحصاء السكاني (احصاء السكان):**

تعريفها: عملية منهجية موحدة وغالبا ماتكون رسمية أو حكومية تذهب أبعد من تعداد السكان فحسب لتشمل جمع البيانات الديموغرافية والاقتصادية والاجتماعية التي تنطبق على فترة زمنية محدودة على كافة الاشخاص في بلد ما أوجزء محدد منه ، وتجميع هذه البيانات وتحليلها ونشرها ، وهو عملية دورية يتم خلالها عد السكان رسميا ، ويشير هذا المصطلح الى تعدادات السكان في كل دولة ، والتي تجري وفق توصيات الامم المتحدة مرة كل ١٠ سنوات ، وتستخدم معطيات تعداد السكان لاغراض البحوث و التخطيط ، ويرتبط الاحصاء السكاني بجغرافية السكان وهو كفرع من فروع الجغرافيا البشرية تكمن أهميته في أنه يساعد على فهم الحقائق السكانية الموجودة على أرض الواقع مثل أعداد السكان ، وكذلك تساعد على التخطيط لمستقبل أفضل للسكان من خلال معرفة مدى احتياجاتهم المختلفة لتلبيتها .

٢ – **جغرافية السكان :**

تعريفها: علم حديث من فروع الجغرافيا البشرية يهتم بدراسة العلاقات المتعددة القائمة بين الانسان والبيئة المحيطة به و كيف توزع السكان وتركيبتهم على الارض ، كما يهتم أيضا بضرورة توضيح مدى الاختلافات المكانية من مكان لاخر من حيث توزيع السكان ، ونموهم وهجرتهم وتوزيعهم والعلاقة بين هذا وطبيعة الاماكن ، ويكمل هذا الفرع دور علوم الجغرافيا الاخرى كالسياسية والاقتصادية ، بالاضافة الى

اندماجه مع علوم جغرافية أخرى لدراسة الاسباب والعوامل الناتجة عن توزيع السكان وهجرتهم فوق سطح الارض ، ويركز على عدد من المجالات ذات العلاقة بالسكان ومن أهمها دراسة عدد السكان في الحاضر والمستقبل ويتمثل ذلك بالتركيز على نسبة المواليد والوفيات والهجرة مع الاخذ بالاسباب والنتائج .

٣ – **الاحصاء الحيوي:**

تعريفها: تتعدد التعاريف المتعلقة بالاحصاء الحيوي منها :

(١) هى الاحصاءات الخاصة بالاطوار المهمة من حياة الانسان من حيث أنه كائن حي منذ ولادته حتى وفاته ولذلك فهى تبحث حالة السكان من حيث الزيادة والنقص والحوادث الهامة التي تقع بهم وبذلك فان الاحصاءات الحيوية تشمل حالات الولادة والتبني والوفاة والزواج والطلاق والمرض والهجرة وتصدر بياناتها بذلك مع تبويبها وتصنيفها في صورمختلفة وبخصائص متنوعة من حيث النوع والعمروالمهنة وما الى ذلك من صفات.

(٢) ذلك الفرع من الاحصاء الذي يهتم بأعداد الولادات والوفيات وعدد السكان ونسبة حدوث المرض ، والاستعمالات الاساسية للاحصاء الحيوي هى التحقق من الظروف التي تؤثر على الصحة ورفاهية المجتمعات خلال فترة من الزمن لتحديد الاسباب المحتملة لمثل هذه الظروف وبالنتيجة لمساعدة دراسة الوقاية من الوفيات والمرض ، ويتم تطبيق علم الاحصاء الحيوي في عدد من حقول علم البيولوجيا ليشمل تصميم التجارب البيولوجية و خاصة تلك المتعلقة بالطب والزراعة اضافة الى جمع و تلخيص وتحليل البيانات الناتجة عن هذه التجارب وترجمة النتائج على الرغم من توافر البرامج الاكاديمية الخاصة في

الاحصاء الحيوي في مرحلة الدراسات العليا للتخصصات الطبية والزراعية ، وتتعدد تطبيقات علم الاحصاء الحيوي لتشمل حقل الصحة العامة (علم الاوبئة ، أبحاث الخدمات الطبية ، التغذية ، الصحة البيئية وادارة وسياسة الرعاية الصحية) ، تصميم وتحليل التجارب السريرية في الطب ، وعلم الوراثة السكانية واحصاء علم الوراثة للربط بين الاختلاف في الطراز الجيني و اختلاف الطراز الظاهري حيث استخدم في المزارع لتحسين المحاصيل والانتاج الحيواني ، تحليل البيانات الجينومية ، تسلسل التحليل البيولوجي ، نظم علم الاحياء لتداخل الشبكات الجينية و تحليل مساراتها المختلفة.

٤ – **<u>علم الديموغرافيا :</u>**

<u>تعريفه:</u> تتعدد التعاريف المتعلقة بعلم الديموغرافيا منها :

(١) علم احصائي رياضي يهتم بدراسة حجم و توزيع وتركيب السكان ومكونات التغير الافقي والرأسي في هذه العناصر الثلاثة مثل المواليد والوفيات والهجرة ثم التغير الاجتماعي للفرد في المجتمع بصوره المتعددة اجتماعيا وثقافياواقتصاديا.

(٢) هو فرع من علم الاجتماع والجغرافيا البشرية يقوم على دراسة علمية لخصائص السكان المتمثلة في الحجم والتوزيع والكثافة والتركيب والاعراق ومكونات النمو (الانجاب والوفيات والهجرة) ونسب الامراض والحالات الاقتصادية والاجتماعية ونسب الاعمار والجنس ومستوى الدخل وغير ذلك في احدى المناطق.

٥ – **<u>الاحصاءات السكانية و الحيوية:</u>**

<u>تعريفها:</u> الدراسة الاحصائية المتعلقة بالانسان من حيث خصائصه وفعالياته والتغيرات التي تحدث له من تكاثر ووفاة وهجرة.

- **الاحصاءات السكانية:**

تعريفها: الدراسة الاحصائية التي تهتم بالانسان من حيث تعداده وهجرته .

- **الاحصاءات الحيوية:**

تعريفها: مجموعة الاحداث التي تصيب الانسان منذ ولادته وحتى وفاته .

الفصل الثاني

الاحصاءات السكانية و الحيوية

أهمية الاحصاءات السكانية و الحيوية:

١ – توفير البيانات التي تساعد في حل المشكلات السكانية.

٢- معرفة التوزيع السكاني في المناطق المختلفة مما يساعد في التنمية الاقتصادية.

٣- تقدير احتياجات البلد من خدمات تعليمية وصحية واسكانية.

٤- خلق توازن لانتقال السكان ما بين الريف والمدينة (منطقة وأخرى).

البيانات الاحصائية الضرورية للاحصاءات السكانية والحيوية:

١- عدد السكان الكلي في منتصف العام .

٢- عدد المواليد :

١/٢ عدد كل المواليد.

٢/٢ عدد المواليد الاحياء .

٣/٢ عدد المواليد الموتى .

٣- عدد الوفيات :

١/٣ عدد كل الوفيات .

٢/٣ عدد حديثي الولادة .

٣/٣ عدد الرضع .

٤/٣ عدد النساء المتوفيات بسبب الحمل والولادة .

٤- عدد المهاجرين :

١/٤ المهاجرين الى البلد.

٢/٤ المهاجرين من البلد.

٥- عدد النساء :

٥/١ النساء في سن الحمل .

٥/٢ النساء المتزوجات .

التعاريف المتفق عليها في هذا الفصل :

١- الوفيات : الوفاة التي تحدث بعد الولادة وليس قبل الولادة.

٢- الاطفال الرضع : الاطفال دون السنة وأكثر من شهر.

٣- الاطفال حديثي الولادة : الاطفال من الولادة وحتى (٢٨) يوم.

٤- سن الحمل : بين (١٥ – ٤٥) سنة.

الاحصاءات السكانية والحيوية والتقدير السكاني

أولا: التقدير السكاني

ثانيا : الاحصاءات السكانية

ثالثا : الاحصاءات الحيوية

أولا: التقدير السكاني

تتعدد طرق تقدير عدد السكان الا أن الطريقة الاكثرأهمية هي ايجاد علاقة خطية بين عدد السكان في سنة ما و عدد السكان في سنة أخرى وتسمى هذه العلاقة الخطية بمعادلة تقدير السكان الخطية وهي تأخذ الصيغة الآتية :

$$ع_{ن} = (م \times ن) + ع_{٠}$$

يتم ايجادها كما يلي :

م : الزيادة السكانية السنوية (نسبة)

$ع_{ن}$: عدد السكان في نهاية الفترة الزمنية

$ع_{٠}$: عدد السكان في بداية الفترة الزمنية

ن : طول الفترة الزمنية (النهاية – البداية)

م = (عدد السكان في نهاية الفترة الزمنية – عدد السكان في بداية الفترة الزمنية) / طول الفترة الزمنية

م = (عن – ع٠) / ن

<u>مثال(١):</u>

في احدى البلدان وجد أن عدد السكان في سنة ٢٠٠٥ هو مليون نسمة ثم زاد هذا العدد الى مليون ونصف نسمة سنة ٢٠١٥

<u>المطلوب : اختر الاجابة الصحيحة للعبارات الاتية :</u>

١- نسبة الزيادة السكانية هي:

(أ)٤٠٠٠٠ (ب) ٥٠٠٠٠ (ج) ٣٠٠٠٠ (د) ٦٠٠٠٠

٢- المعادلة الخطية لتقدير عدد السكان هي:

(أ) ٥٠٠٠٠ × ن + ١٠٠٠٠٠٠ .

(ب) ٥٠٠٠٠ × ن + ١٥٠٠٠٠٠ .

(ج) ٤٠٠٠٠ × ن + ١٠٠٠٠٠٠ .

(د) ٤٠٠٠٠ × ن + ٦٠٠٠٠٠٠ .

٣- عدد السكان التقديري سنة ٢٠٢٠ هي :

(أ) ١٨٠٠٠٠٠نسمة (ب) ١٩٠٥٠٠ نسمة (ج) ١٦٠٠٠٠ نسمة (د)١٧٥٠٠٠٠ نسمة

<u>الحل:</u>

١- نسبة الزيادة السكانية م = (عن – ع٠) / ن

م = (١٥٠٠٠٠٠ – ١٠٠٠٠٠٠) / (٢٠١٥ – ٢٠٠٥)

م = ٥٠٠٠٠

<u>بالتالي العبارة الصحيحة (ب)</u>

٢- عن = (م × ن) + ع٠

$ع_{ن}$ = (٥٠٠٠٠ × ن) + ١٠٠٠٠٠٠

بالتالي العبارة الصحيحة (أ)

٣- عدد السكان التقديري سنة ٢٠٢٠

وذلك يعني أن : ن = (٢٠٢٠ – ٢٠٠٥) = ١٥

$ع_{١٥}$ = (٥٠٠٠٠ × ١٥) + ١٠٠٠٠٠٠ = ١٧٥٠٠٠٠

بالتالي العبارة الصحيحة (د)

مثال(٢):

اذا كان عدد السكان في احدى محافظات مصر لسنة ٢٠٠٠ هو ٦٠٠٠٠ نسمة اذا أصبح سكان هذه المحافظة عام ٢٠٠٥ هو ٦٥٠٠٠ نسمة

حدد صحة أو خطأ العبارات الاتية :

١- نسبة الزيادة السكانية بين عامي ٢٠٠٠ و ٢٠٠٥ هى ٥٠٠٠ .

٢- معادلة تقدير عدد السكان هي: (١٠٠٠) ن + ٦٠٠٠٠ .

٣- عدد السكان لعام ٢٠١٠ هو ٦٥٠٠٠ نسمة .

الحل :

١- م = (٦٥٠٠٠– ٦٠٠٠٠) / (٢٠٠٥ – ٢٠٠٠)

م = ١٠٠٠ بالتالي العبارة خاطئة

٢- $ع_{ن}$ = م × ن + $ع_{٠}$

$ع_{ن}$ = (١٠٠٠) ن +٦٠٠٠٠

بالتالي العبارة صحيحة

٣- ن = ٢٠١٠ – ٢٠٠٠ = ١٠

$ع_{١٠}$ = (١٠٠٠× ١٠) + ٦٠٠٠٠ = ٧٠٠٠٠ نسمة

بالتالي (العبارة خاطئة)

سؤال للطالب : في التمرين السابق قدرعددالسكان لعام ٢٠١٣.

ثانيا : الاحصاءات السكانية

القوانين الخاصة بالاحصاءات السكانية:

١- الزيادة الطبيعية للسكان = عدد المواليد – عدد الوفيات

٢- معدل الزيادة الطبيعية للسكان في سنة ما =

(الزيادة الطبيعية للسكان/عدد السكان في منتصف السنة) × ١٠٠٠

٣- محصلة الهجرة = المهاجرين الى البلد- المهاجرين من البلد

٤- الزيادة السكانية = الزيادة الطبيعية للسكان + محصلة الهجرة

٥- معدل الهجرة في سنة ما =

(محصلة الهجرة في تلك السنة / عدد السكان في منتصف السنة)× ١٠٠٠

٦- معدل الزيادة السكانية :

١/٦ (الزيادة السكانية / عدد السكان في منتصف السنة) × ١٠٠٠

٢/٦ [(المواليد+المهاجرين للبلد) – (الوفيات + مهاجرين من البلد)] /

عدد السكان في منتصف السنة × ١٠٠٠

٣/٦ معدل الزيادة الطبيعية + معدل الهجرة في ذلك العام .

مثال(١):

اذا كان عدد المواليد في احدى المدن هو ٨٠٠٠٠ نسمة وعدد الوفيات ٦٥٠٠٠ نسمة وعدد السكان في منتصف السنة هو ٥٠٠٠٠٠٠ نسمة نجد أن معدل الزيادة الطبيعية هو:

(أ) ٢ لكل ألف (ب) ٣ لكل ألف (ج) ٤ لكل ألف (د) ٥ لكل ألف

الحل :

معدل الزيادة الطبيعية = (عدد المواليد – عدد الوفيات) / عدد السكان في منتصف السنة × ١٠٠٠

= (٨٠٠٠٠ – ٦٥٠٠٠) / ٥٠٠٠٠٠٠ ×١٠٠٠

= ٣ لكل ألف الاجابة الصحيحة (ب)

مثال(٢) :

في احدى قرى الريف المصري في سنة ٢٠١٦ وجد أن عدد المواليد الاحياء ٥٠٠٠٠ نسمة وعدد الوفيات ٣٥٠٠٠ نسمة وعدد المهاجرين إلى القرية ٣٠٠٠٠ نسمة وعدد المهاجرين من القرية ١٨٠٠٠ نسمة فإذا علمت أن عدد السكان في القرية في منتصف السنة هو ١٥٠٠٠٠ نسمة حدد صحة أو خطأ العبارات الاتية :

١- معدل الزيادة الطبيعية هي ١٠٠ لكل ألف .

٢- معدل الهجرة هي ٨٠ لكل ألف.

٣- معدل الزيادة السكانية هو ١٢٠ لكل ألف.

الحل :

١- معدل الزيادة الطبيعية = (٥٠٠٠٠ – ٣٥٠٠٠) / ١٥٠٠٠٠ × ١٠٠٠

معدل الزيادة الطبيعية = ١٠٠ لكل ألف بالتالي (العبارة خاطئة)

٢- معدل الهجرة = (٣٠٠٠٠ – ١٨٠٠٠) / ١٥٠٠٠٠ × ١٠٠٠

معدل الهجرة = ٨٠ لكل ألف بالتالي (العبارة صحيحة)

٣- معدل الزيادة السكانية = معدل الزيادة الطبيعية + معدل الهجرة

معدل الزيادة السكانية = ١٠٠ + ٨٠ =١٨٠ بالتالي (العبارة خاطئة)

ثالثا : الاحصاءات الحيوية

تنقسم الى نوعين :

١- احصاءات الوفيات

٢- احصاءات الخصوبة

١- احصاءات الوفيات

القوانين الخاصة باحصاءات الوفيات:

١- عدد وفيات الاطفال الرضع = عدد وفيات الاطفال أقل من سنة – عدد وفيات حديثي الولادة

٢- معدل الوفاة العام (الخام) = عدد الوفيات أثناء السنة / عدد السكان في منتصف السنة × ١٠٠٠

٣- معدل وفيات الرضع = عدد وفيات الرضع في السنة / عدد المواليد الاحياء في تلك السنة × ١٠٠٠

٤- معدل وفيات حديثي الولادة = عدد وفيات حديثي الولادة / عدد المواليد الاحياء × ١٠٠٠

٥ – معدل المواليد الموتى = عدد المواليد الموتى / عدد المواليد الاحياء × ١٠٠٠

٦- معدل وفيات الامومة = عدد وفيات النساء بسبب الحمل أو الولادة / عدد المواليد الاحياء × ١٠٠٠

مثال(١)

اذا كان عدد الوفيات باحدى المدن عام ٢٠١٥ يساوي ٧٠٠٠٠ نسمة واذا علم أن عددالسكان في منتصف السنة يساوي ٧٠٠٠٠٠٠ نسمة نجد أن معدل الوفاة العام (الخام) يساوي :

(أ)٧٠٠ لكل ألف (ب) ١٠٠ لكل ألف (ج) ١٠ لكل ألف (د) ٧٠ لكل ألف

الحل :

معدل الوفاة العام (الخام) = ٧٠٠٠٠ / ٧٠٠٠٠٠٠ × ١٠٠٠

= ١٠ لكل ألف

بالتالي فإن الاجابة هى رقم (ج)

مثال(٢)

اذا كان عدد المواليد الاحياء ٢٠٠٠٠٠ طفل وعدد المواليد الموتى ٢٠٠٠٠ وعدد وفيات الأطفال الأقل من سنة يساوي ٥٠٠٠ طفل منهم ٥٠٠ طفل حديثي الولادة

المطلوب حدد صحة أو خطأ العبارات الاتية :

١- معدل المواليد الموتى = ١٠٠٠ لكل ألف .

٢- معدل وفيات الاطفال الرضع هو ٢٢,٥ لكل ألف.

٣- معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة هو ٢٥ لكل ألف

الحل :

١- معدل المواليد الموتى = ٢٠٠٠٠ / ٢٠٠٠٠٠ × ١٠٠٠

معدل المواليد الموتى = ١٠٠ لكل ألف العبارة خاطئة

٢- معدل وفيات الاطفال الرضع=(٥٠٠٠ – ٥٠٠)/٢٠٠٠٠٠ × ١٠٠٠

= ٢٢,٥ لكل ألف العبارة صحيحة

٣- معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة =٥٠٠ / ٢٠٠٠٠٠ × ١٠٠٠

= ٢,٥ لكل ألف العبارة خاطئة

مثال(٣)

اذا كان عدد وفيات النساء بسبب الحمل أو الولادة يساوي ٩٠٠٠٠ امرأة وعدد المواليد الاحياء ٩٠٠٠٠٠ طفل بالتالي نجد أن معدل وفيات الامومة هو:

(أ)١٠٠ لكل ألف (ب)١٥٠ لكل ألف (ج)١٨٠ لكل ألف (د)١٣٠ لكل ألف

الحل:

معدل وفيات الامومة = ٩٠٠٠٠٠ / ٩٠٠٠٠ × ١٠٠٠= ١٠٠ لكل ألف

الاجابة الصحيحة (أ)

مثال(٤)

في المثال السابق اذا زاد عدد وفيات النساء بسبب الحمل أوالولادة بنسبة ١٠% وعدد المواليد الاحياء بنسبة ١٥%

حدد صحة أو خطأ العبارة الآتية:

معدل وفيات الامومة هو : ٩٥,٧ لكل ألف.

الحل:

عدد وفيات النساء بسبب الحمل أوالولادة = ٩٠٠٠٠ × ١٠% + ٩٠٠٠٠

= ٩٩٠٠٠ امرأة

عدد المواليد الاحياء = ٩٠٠٠٠٠ × ١٥% + ٩٠٠٠٠٠ = ١٠٣٥٠٠٠ طفل

معدل وفيات الامومة = ٩٩٠٠٠ / ١٠٣٥٠٠٠ × ١٠٠٠ = ٩٥,٧ لكل ألف

بالتالي العبارة صحيحة

٢- احصاءات الخصوبة

القوانين الخاصة باحصاءات الخصوبة:

١- معدل الولادة الخام = عددالمواليدالاحياء / عدد السكان في منتصف السنة × ١٠٠٠

٢- معدل الخصوبة العام = عددالمواليدالاحياء / عدد النساء في سن الحمل في منتصف السنة × ١٠٠٠

٣- معدل الخصوبة للنساء المتزوجات = عددالمواليد الاحياء في السنة / عدد النساء المتزوجات في منتصف السنة × ١٠٠٠

٤- معدل الخصوبة حسب فئات العمر = عدد المواليد الاحياء للنساء في فئة عمر محددة / عدد النساء في تلك الفئة في منتصف السنة × ١٠٠٠

مثال(١)

اذا كان عدد المواليد الاحياء في محافظة القليوبية في سنة ما هو ٤٠٠٠٠ طفل وكان عدد السكان في منتصف السنة ٥٠٠٠٠٠ نسمة

اخترالاجابة الصحيحة للعبارة الاتية :

معدل الولادة الخام هو :

(أ)١٢٠ لكل ألف (ب)٩٠ لكل ألف (ج) ٦٠ لكل ألف (د)٨٠ لكل ألف

الحل:

معدل الولادة الخام = ٤٠٠٠٠ / ٥٠٠٠٠٠ × ١٠٠٠ = ٨٠ لكل ألف

الاجابة الصحيحة هى (د)

مثال(٢)

اذا كان عدد المواليد الاحياءفي سنة ٢٠١٦ هو ٢٤٠٠ طفل وكان عدد النساء في سن الحمل في ١-٧-٢٠١٦ هو ٨٠٠٠٠ امرأة حدد صحة أو خطأ العبارة الآتية:

معدل الخصوبة هو٢٠ لكل ألف.

الحل:

معدل الخصوبة = ٢٤٠٠ / ٨٠٠٠٠ × ١٠٠٠ = ٣٠ لكل ألف

(العبارة خاطئة)

مثال(٣)

اذا كان عدد المواليد الاحياء في احدى المدن في سنة ٢٠١٤ هو ٨٠٠٠ طفل وعدد النساء المتزوجات في ١-٧-٢٠١٤ يساوي ٨٠٠٠٠٠ امرأة نجد أن معدل الخصوبة للنساء المتزوجات هو:

(أ) ١٢ لكل ألف (ب) ١٠ لكل ألف (ج) ٨ لكل ألف (د) ٩ لكل ألف

الحل:

معدل الخصوبة للنساء المتزوجات = ٨٠٠٠ / ٨٠٠٠٠٠ × ١٠٠٠ = ١٠ لكل ألف

الاجابة الصحيحة هى (ب)

مثال(٤)

اذا كان معدل الخصوبة للنساء المتزوجات هو ١٠٠ لكل ألف في سنة ٢٠١٥ وكان عدد النساء المتزوجات في منتصف السنة هو مليون نسمة .

المطلوب: حدد صحة أو خطأ العبارة الاتية:

(عدد المواليد الاحياء هو ١٠٠٠٠ طفل)

الحل:

معدل الخصوبة للنساء المتزوجات = عددالمواليد الاحياء في السنة / عدد النساء المتزوجات في منتصف السنة × ١٠٠٠

عدد المواليدالاحياء في السنة = معدل الخصوبة × عدد النساء المتزوجات في منتصف السنة

عددالمواليدالاحياء في السنة =١٠٠ ÷ ١٠٠٠ ×١٠٠٠٠٠٠

=١٠٠٠٠٠ طفل (العبارة خاطئة)

مثال(٥)

اذا توافرت لديك بيانات الجدول الاتي :

فئات	عدد نساء	عددالمواليدالاحياء
٣٠ – ٣٥	٦٠٠٠٠	٣٠٠٠
٣٦ – ٤٥	٨٠٠٠٠	٤٠٠٠

حدد صحة أوخطأ العبارة الاتية:

١- معدل الخصوبة للفئة العمرية ٣٠-٣٥ هو ٥٠ لكل ألف.

٢- معدل الخصوبة للفئة العمرية ٣٦-٤٥ هو ٥٠ لكل ألف.

٣- معدل الخصوبة للفئة العمرية ٣٠-٤٥ (معدل الخصوبة العام) هو٥٠ لكل ألف

الحل :

١- معدل الخصوبة للفئة العمرية ٣٠-٣٥ = ٣٠٠٠ ÷ ٦٠٠٠٠ ×١٠٠٠ = ٥٠ لكل ألف

(العبارة صحيحة)

٢- معدل الخصوبة للفئة العمرية ٣٦-٤٥ = ٤٠٠٠ ÷ ٨٠٠٠٠ × ١٠٠٠ = ٥٠ لكل ألف

(العبارة صحيحة)

٣- معدل الخصوبة للفئة العمرية ٣٠-٤٥ (معدل الخصوبة العام) =

(٣٠٠٠ + ٤٠٠٠) / (٦٠٠٠٠ + ٨٠٠٠٠) × ١٠٠٠ = ٥٠ لكل ألف

(العبارة صحيحة)

تمارين على الباب الثامن

تمرين(١)

اذا كان عدد المواليد في احدى المدن المصرية هو ٥٠٠٠٠ نسمة وعدد الوفيات هو٤٠٠٠٠٠ نسمة ومعدل الزيادة الطبيعية هو ٥٠٠ لكل ألف. ما هو عدد السكان في منتصف السنة؟ واذا اصبح معدل الزيادة في السنة التالية ٦٠٠ لكل ألف ما هو عدد السكان في منتصف السنة؟ اذا علمت ان عدد الوفيات انخفض بنسبة ١٠% وعدد المواليد زاد بنسبة ٢٠%.

تمرين(٢)

اذا علمت ان معدل الزيادة السكانية في احدى المدن هو٨٠ لكل ألف وأن معدل الهجرة ٦٠ لكل ألف وأن عدد المواليدلهذه المدينة هو٢٠٠٠٠٠ نسمة وعدد السكان في هذه المدينة هو ١٠٠٠٠٠٠ نسمة اوجد عدد وفيات هذه المدينة.

تمرين(٣)

اذا كان عدد الوفيات في بلد ما سنة ٢٠١٦ يساوي ٥٠٠٠٠ نسمة وإذا علم أن معدل الوفاة العام (الخام) هو٥ لكل ألف فاوجد عدد السكان في منتصف السنة.

تمرين(٤)

اذا علمت أن وعدد وفيات الاطفال الاقل من سنة يساوى ٦٠٠٠ طفل منهم ٣٦٠ طفل حديثي الولادة و عدد المواليد الاحياء ٥٠٠٠٠٠ طفل

المطلوب:

١- عدد الاطفال الرضع.

٢- معدل وفيات الاطفال الرضع.

٣- معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة.

تمرين(٥)

اذا كان عدد المواليد الاحياء ٤٠٠٠ طفل وعدد النساء المتزوجات في منتصف السنة يساوى ١٠٠٠٠٠ امرأة اوجد معدل الخصوبة للنساء المتزوجات.

تمرين(٦)

حدد صحة أو خطأ العبارات الاتية:

١- تضم الاحصاءات الحيوية كل من احصاءات الوفيات واحصاءات المواليد.

٢- معدل الزيادة السكانية لبلد ما = (الزيادة السكانية ÷ عدد السكان لهذه البلد) × ١٠٠٠

٣- الاحصاءات السكانية هي الدراسة الاحصائية التي تهتم بالانسان من حيث تعداده وهجرته.

٤- عدد وفيات الاطفال الرضع = عدد الاطفال أقل من سنة

تمرين(٧)

اذا كان عدد المواليد الأحياء في سنة ما هو ٢٠٠٠ طفل وكان عدد النساء في سن الحمل في منتصف السنة ٥٠٠٠٠ امرأة فإن معدل الخصوبة هو :

(أ)٢٠ لكل ألف (ب) ٣٠ لكل ألف (ج)٤٠ لكل ألف (د) ٥٠ لكل ألف

التطبيقات



التطبيق الأول

اختر الاجابة الصحيحة لكل عبارة من العبارات الآتية:

- إذا كان الانتاج السنوى بالمليون جنيه لأحد المصانع (سنة ٢٠١٣ هى نقطة الأصل)

السنة	٢٠١٣	٢٠١٤	٢٠١٥	٢٠١٦
الانتاج	٢	٤	٨	١٠

اوجد ما يلى:

١- وسيط الانتاج:

(أ) ٨ مليون جنيه	(ب) ٦ مليون جنيه	(جـ) ٤ مليون جنيه	(د) ١٠ مليون جنيه

٢- الربيع الأدنى للانتاج:

(أ) ٢ مليون جنيه	(ب) ٣ مليون جنيه	(جـ) ٤ مليون جنيه	(د) ٥ مليون جنيه

٣- الربيع الأعلى للانتاج:

(أ) ٦ مليون جنيه	(ب) ٧ مليون جنيه	(جـ) ٨ مليون جنيه	(د) ٩ مليون جنيه

٤- نصف المدى الربيعى للانتاج:

(أ) ٢ مليون جنيه	(ب) ٣ مليون جنيه	(جـ) ٤ مليون جنيه	(د) ٥ مليون جنيه

٥- معامل الاختلاف الربيعى للانتاج:

(أ) ٢٠%	(ب) ٤٠%	(جـ) ٦٠%	(د) ٨٠%

٦- معامل التواء بولى الربيعى للانتاج:

(أ) -٠,٤٢	(ب) ٠,٥٢	(جـ) -٠,٣٣	(د) ٠,٤٦

٧- معامل الانحدار (أ):

(أ) ٢,٨	(ب) ٣,١	(جـ) ٥,٣	(د) ١,٥

٨- ثابت الانحدار (ب):

(أ) ١,٨	(ب) ١,٢	(جـ) ١,٦	(د) ١,٤

٩- معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة معتبراً سنة ٢٠١٣ هى نقطة الأصل:

(أ) ص=١,٦س+٣,١	(ب) ص=٢,٨س+١,٨	(جـ) ص=٣,٥س+١,٢	(د) ص=٣,١س+١,٤

١٠- انتاج عام ٢٠٢٠:

(أ) ٢٠,٣ مليون جنيه	(ب) ٢١,٤ مليون جنيه	(جـ) ١٩,٣ مليون جنيه	(د) ١٨,٦ مليون جنيه

● توافرت لديك البيانات التالية:

المنتج	اسعار عام ٢٠١٥	كميات عام ٢٠١٥	اسعار عام ٢٠١٦	كميات عام ٢٠١٦
عصائر	٥	١٠	٨	١٥
ألبان	٦	١٢	٩	١٨

اوجد ما يلى:

١١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للاسعار هو:

(أ) ١٤٦,٥%	(ب) ١٦٠,٥%	(جـ) ١٥٤,٥%	(د) ١٤٢,٥%

١٢- رقم لاسبير هو:

(أ) ١٩٣%	(ب) ١٥٨%	(جـ) ١٧٨%	(د) ١٥٤%

١٣- رقم باش هو:

(أ) ١٥٤%	(ب) ١٦٧,٥%	(جـ) ١٩٣%	(د) ١٧٨%

١٤- رقم دوربش وبالى هو:

(أ) ١٦٧,٥%	(ب) ١٥٤%	(جـ) ١٩٣%	(د) ١٧٨%

١٥- الرقم القياسى الأمثل لفيشر هو:

(أ) ١٥٨%	(ب) ١٥٤%	(جـ) ١٦٧,٥%	(د) ١٨٩%

• تبين لأحد المصانع المنتجة لقطع غيار الغسالات أن متوسط عمر القطعة من منتج معين هو ٥٠٠ ساعة وأن الانحراف المعيارى ١٢ ساعة فإن:

١٦- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة تتراوح ما بين ٤٨٨ ساعة ، ٥١٢ ساعة هو:

(أ) ٠,٦٨٢٦	(ب) ٠,٣٤١٤	(جـ) ٠,٥٣٢٤	(د) ٠,٧٣٥٢

١٧- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة ٤٨٨ ساعة على الأقل هو:

(أ) ٠,٧٣٣٥	(ب) ٠,٩٢١٤	(جـ) ٠,٨٤١٣	(د) ٠,٦٧١٥

١٨- احتمال ألا يزيد عمر أحد القطع المنتجة عن ٤٨٨ ساعة هو:

(أ) ٠,٣٦٧١	(ب) ٠,٢٥١٣	(جـ) ٠,١٠٦٨	(د) ٠,١٥٨٧

١٩- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة يتراوح ما بين ٥١٢ ساعة و ٥٢٧ ساعة هو:

(أ) ٠,٣٥٢١	(ب) ٠,١٢٥٧	(جـ) ٠,١٤٦٥	(د) ٠,٧٤٦٥

٢٠- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة ٥١٢ ساعة على الأكثر هو:

(أ) ٠,٨٤١٣	(ب) ٠,٧٢١٥	(جـ) ٠,٩٢١١	(د) ٠,٦٥٧٨

• بلغت نسبة المصابين بمرض البلهارسيا فى إحدى قرى الريف المصرى حجمها ١٠٠٠٠ فرداً ٢٠% وعند مستوى معنوية $\propto$ = ١% فإن:

٢١- الحد الأدنى لنسبة المصابين بمرض البلهارسيا فى مجتمع الريف المصرى عموماً هو:

(أ) ١٨%	(ب) ١٩%	(جـ) ٢٠%	(د) ٢١%

٢٢- الحد الأعلى لنسبة المصابين بمرض البلهارسيا فى مجتمع الريف المصرى عموماً هو:

(أ) ١٩%	(ب) ٢٠%	(جـ) ٢١%	(د) ٢٢%

• إذا كان لدينا عينة حجمها ٥٠ وحدة منتجة موزعة حسب الأرباح الصافية والتكاليف الكلية (بالألف جنيه)

التكاليف س / الأرباح ص	١٠-	١٥-	٢٠-٢٥	المجموع
٢-	٥	–	١٥	٢٠
٤-	٤	١٦	–	٢٠
٦-٨	١	٩	–	١٠
المجموع	١٠	٢٥	١٥	٥٠

نجد أن:

٢٣- معامل ارتباط بيرسون (ر) هو:

(أ) -٠,٤	(ب) ٠,٦	(جـ) -٠,٨	(د) ٠,٤

٢٤- هناك علاقة بين التكاليف الكلية والأرباح الصافية:

(أ) طردية شبه متوسطة	(ب) عكسية قوية جداً	(جـ) طردية قوية	(د) عكسية شبه متوسطة

٢٥- معامل انحدار ص / س (أ) يساوى:

(أ) ٠,٨	(ب) -٠,٤	(جـ) ٠,٩	(د) -٠,٦

٢٦- الجزء الثابت (ب) هو:

(أ) -٢,٦	(ب) ١١,٨	(جـ) ١٢,٥	(د) -٤,٥

٢٧- متوسط الأرباح هو:

(أ) ٦٥٠٩ جنيه	(ب) ٤٦٠٠ جنيه	(جـ) ٣٨٧٠ جنيه	(د) ٥٤٢٠ جنيه

٢٨- الحد الأعلى لمتوسط الأرباح فى المصنع عموماً عند مستوى معنوية ∝ = ٥% هو:

(أ) ٢٦٧٠,٩ جنيه	(ب) ٣٤٣٦,٧ جنيه	(جـ) ٤٤٨٩,٧ جنيه	(د) ٥٠١٥,٨ جنيه

٢٩- الانحراف المعيارى للأرباح هو:

(أ) ١,٥ ألف جنيه	(ب) ٢,٣ ألف جنيه	(جـ) ٣,٦ ألف جنيه	(د) ٤,٨ ألف جنيه

٣٠- الحد الأدنى لمتوسط الأرباح فى المصنع عموماً عند مستوى معنوية ∝ = ٥% هو:

(أ) ٣٦٧٨,٨ جنيه	(ب) ٤١٨٤,٢ جنيه	(جـ) ٥٤٢١,٧ جنيه	(د) ٦٣٠١,٢ جنيه

٣١- معادلة خط الاتجاه العام هى:

(أ) ص=-٤,٥س-٠,٩	(ب) ص=١٢,٥س+٩,٨	(جـ) ص=-٤,٠س+١١,٨	(د) ص=٩,٠س-٨,٤

٣٢- إذا كانت الأرباح الصافية ١٨٠٠ جنيه فإن التكاليف الكلية هى:

(أ) ٢٩ ألف جنيه	(ب) ٣٦ ألف جنيه	(جـ) ٢٥ ألف جنيه	(د) ٣٥ ألف جنيه

- إذا توافرت لديك البيانات التالية:

البند / السنة	الأجور بالألف جنيه	نفقة المعيشة بالألف جنيه
٢٠٠٢	٣٥٠٠	١٨٠٠
٢٠١٥	٥٢٥٠	٣١٥٠

فإن:

٣٣- الرقم القياسى للأجور النقدية هو:

(أ) ١٥٠%	(ب) ١٦٠%	(جـ) ١٧٠%	(د) ١٨٠%

٣٤- الرقم القياسى لنفقة المعيشة هو:

(أ) ١٨٠%	(ب) ١٧٥%	(ج) ١٨٥%	(د)١٧٠%

٣٥- الرقم القياسى للأجر الحقيقى هو:

(أ) ٩٤,٢%	(ب) ٧٨,٧%	(ج) ٨٩,٣%	(د)٨٥,٧%

- إذا توافرت لديك البيانات التالية:

الأسعار س	١٠	١٥	٢٠	١٥	١٥
الكميات ص	٥	٨	٩	٩	٩

فإن:

٣٦- معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين الأسعار والكميات هو:

(أ) ٠,٧	(ب) ٠,٨	(ج) ٠,٩	(د) ٠,٦

٣٧- معامل انحدار الكميات على الأسعار ص / س هو (أ) يساوى:

(أ) ٠,٤	(ب) ٠,٥	(ج) ٠,٣	(د) ٠,٦

٣٨- الجزء الثابت (ب) يساوى:

(أ) ٤	(ب) ٣	(ج) ٢	(د) ٥

٣٩- معادلة انحدار الكميات على الأسعار هى:

(أ) ص= ٠,٤ س + ٢	(ب) ص= ٢ س – ٤	(ج) ص=٠,٤ س + ٥	(د) ص=٠,٦ س–٠,٤

٤٠- معامل انحدار الأسعار على الكميات س / ص هو (ج) يساوى:

(أ) ١,٢	(ب) ١,٧	(ج) ١,٦	(د) ١,٥

٤١- معامل ارتباط بيرسون (ر) بمعلومية معاملى الانحدار هو:

(أ) ٠,٨٧	(ب) ٠,٨٤	(ج) ٠,٨٥	(د) ٠,٨٢

٤٢- متوسط الكميات المباعة هو:

(أ) ٧ وحدات	(ب) ٥ وحدات	(جـ) ٩ وحدات	(د) ٨ وحدات

٤٣- السعر الشائع (المنوال) هو:

(أ) ٢٠ جنيه	(ب) ١٠ جنيه	(جـ) ١٥ جنيه	(د) ٢٥ جنيه

٤٤- الكمية المباعة إذا كان السعر ٣٠ جنيه هى:

(أ) ١٢ وحدة	(ب) ١٧ وحدة	(جـ) ١٤ وحدة	(د) ١٦ وحدة

٤٥- معامل التحديد هو:

(أ) ٠,٧٥٦٩	(ب) ٠,٦٥٦١	(جـ) ٠,٧٢٢٥	(د) ٠,٦٧٢٤

التطبيق الثانى

السؤال الأول:

فيما يلى توزيع عينة من الخراف وفقاً لأوزانهم بالكيلو جرام فى إحدى المزارع:

الوزن	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-٩٠	المجموع
عدد الخراف	٥٠	٢٠٠	٥٠٠	٢٠٠	٥٠	١٠٠٠

فإذا علمت أن العينة تمثل ١٠% من إجمالى عدد الخراف بالمزرعة فإن:

١- المدى للوزن هو:

(أ) ٤٠	(ب) ٤٥	(جـ) ٥٠	(د) ٧٠

٢- متوسط الوزن هو:

(أ) ٦٠	(ب) ٦٣	(جـ) ٦٥	(د) ٨٠

٣- الوزن الشائع هو:

(أ) ٦٣	(ب) ٧٠	(جـ) ٧٥	(د) ٦٥

٤- تباين الوزن هو:

(أ) ٧٠	(ب) ٧٥	(جـ) ٨٠	(د) ٩٥

٥- الانحراف المعيارى للوزن مقرب لرقم واحد بعد العلامة هو:

(أ) ٦,٩	(ب) ٨,٩	(جـ) ٨٩,٤	(د) ٥,٩

٦- معامل الاختلاف المعيارى للوزن مقرب لرقم واحد بعد العلامة هو:

(أ) ١١,٧%	(ب) ١٢,٣%	(جـ) ١٣,٧%	(د) ٦٣,٧%

٧- معامل الالتواء هو:

(أ) -٢	(ب) +١	(جـ) -١	(د) صفر

٨- شكل التوزيع:

(أ) إلتواء سالب	(ب)قريب من التماثل	(جـ) إلتواء موجب	(د) متماثل

٩- التوزيع الاحتمالى الذى يتبعه التوزيع السابق هو:

(أ) الطبيعى	(ب) ذو الحدين	(جـ) بواسون	(د) جاما

• **باستخدام التوزيع الاحتمالى السابق تحديده اوجد ما يلى:**

١٠- احتمال أن يتراوح وزن الخروف فى العينة بين ٥٥ كجم ، ٧٥ كجم:

(أ) ٠,٢٢٧٢	(ب) ٠,٣٦٨٦	(جـ) ٠,٣٧٧٢	(د) ٠,٧٣٧٢

١١- عدد الخراف الذين يبلغ وزنهم ٧٣ كجم على الأقل بالعينة هو:

(أ) ٨٤١	(ب) ١٨٤	(جـ) ١٤٨	(د) ٤٨١

١٢- نسبة الخراف الذين يبلغ وزنهم ٨٥ كجم على الأكثر بالعينة لأقرب رقم صحيح هى:

(أ) ٩٥%	(ب) ٩٩%	(جـ) ٩٧%	(د) ٩٦%

١٣- عدد الخراف الذين يبلغ وزنهم ٧٣ كجم فأكثر بالمزرعة هو:

(أ) ١٨٤١	(ب) ١٨٤	(جـ) ٤٨١١	(د) ٤١٨١

١٤- الوزن الذى يقل عنه ٣٠% من عدد الخراف بالعينة مقرب لرقم واحد بعد العلامة هو:

(أ)٦٠,٤	(ب) ٦٩,٤	(جـ) ٦٤,٤	(د) ١٨٤

- **<u>عند تقدير نسبة الخراف الذين يقل وزنهم عن ٨٥ كجم فى المزرعة عموماً بدرجة ثقة ٩٥% فإن:</u>**

١٥- الحد الأدنى لهذه النسبة هو:

(أ) ٩٥%	(ب) ٩٧%	(جـ) ٩٨%	(د) ٩٩%

١٦- الحد الأعلى لهذه النسبة هو:

(أ) ١٠٠%	(ب) ٩٩%	(جـ) ٩٨%	(د) ٩٧%

١٧- مستوى المعنوية المستخدم فى التقدير هو:

(أ) ١%	(ب) ٥%	(جـ) ٩٥%	(د) ٩٩%

١٨- الحد الأدنى للعدد هو:

(أ) ٩٧٠٠	(ب) ٩٧٥٠	(جـ) ٩٨٠٠	(د) ١٠٠٠٠

- **<u>عند تقدير متوسط وزن الخروف فى المزرعة عموماً بدرجة ثقة ٩٩% فإن:</u>**

١٩- الدرجة المعيارية المقابلة لدرجة ثقة هى:

(أ) ٥,٥٨	(ب) ١,٩٦	(جـ) ٢,٥٨	(د) ٠,٠١

٢٠- الحد الأدنى لمتوسط وزن الخروف مقرب لرقم واحد بعد العلامة هو:

(أ) ٦٤,٣	(ب) ٦٤,٧	(جـ) ٦٥,٣	(د) ٦٥,٧

٢١- الحد الأعلى لمتوسط وزن الخروف مقرب لرقم واحد بعد العلامة هو:

(أ) ٦٥,٧	(ب) ٦٥,٣	(جـ) ٦٤,٧	(د) ٦٤,٣

السؤال الثاني:

فيما يلى توزيع مجموعة من عملاء إحدى شركات التليفون المحمول وفقاً لقيمة الفاتورة الشهرية بالجنيه:

قيمة الفاتورة	أقل من ١٥٠	١٥٠-	١٥٥-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-	المجموع
عدد العملاء	٢٥	١٠	٢٠	٢٠	١٥	١٠	١٠٠

من الجدول السابق فإن:

٢٢- وسيط قيمة الفاتورة لأقرب رقم صحيح هو:

(أ) ١٦٨	(ب) ١٦٥	(جـ) ١٦١	(د) ١٦٣

٢٣- منوال قيمة الفاتورة بطريقة الرافعة هو:

(أ) ١٥٨	(ب) ١٦٨	(جـ) ١٦٩	(د) ١٧٦

٢٤- متوسط قيمة الفاتورة المستنتج بمعلومية الوسيط والمنوال لأقرب رقم صحيح هو:

(أ) ١٦٩	(ب) ١٦٨	(جـ) ١٦٣	(د) ١٦١

٢٥- نصف المدى الربيعى هو:

(أ) ٧	(ب) ٨	(جـ) ٩	(د) ١٠

٢٦- معامل الاختلاف الربيعى مقرب لرقم واحد بعد العلامة هو:

(أ) ٤,٣%	(ب) ٦,٣%	(جـ) ١٠,٦%	(د) ١٢,٣%

٢٧- معامل الالتواء الربيعى لبولى هو:

(أ) - ٠,٣	(ب) + ١	(جـ) - ١	(د) صفر

السؤال الثالث:

فيما يلى أسعار وكميات مجموعة من السلع خلال عامى ٢٠١٥ ، ٢٠١٦

السلعة	٢٠١٥		٢٠١٦	
	أسعار	كميات	أسعار	كميات
سمك	٥٠	١٠	٧٥	١٢
لبن	٣٠	٨	٥٠	٩
تمر هندى	١٠	٥	١٦	٧

من الجدول السابق فإن:

٢٨- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير) هو:

(أ) ١٩٥,٧%	(ب) ١٦٠,٧%	(ج) ١٥٥,٧%	(د) ٥٥,٧%

٢٩- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم باش) هو:

(أ) ١٥٥,٥%	(ب) ١٥٥,٦%	(ج) ١٥٥,٧%	(د) ٥٥,٥%

٣٠- الرقم القياسى الأمثل لفيشر هو:

(أ) ١٥٥,٦%	(ب) ١٥٥,٧%	(ج) ٥٥,٧%	(د) ٥٥,٦%

السؤال الرابع:

إذا كان متوسط عدد ساعات العمل بمصنع الهنا ٥٠ ساعة اسبوعياً ، متوسط عدد الوحدات المنتجة اسبوعياً ٤٥ وحدة ، الانحراف المعيارى لعدد الساعات ٥ ساعات ، ولعدد الوحدات المنتجة ٦ وحدات فإذا علمت أن الارتباط بين عدد الساعات وعدد الوحدات المنتجة يبلغ ٨٠% فإن:

٣١- الارتباط بينهما:

(أ) عكسى قوى	(ب) طردى قوى	(ج) طردى متوسط	(د) طردى ضعيف

٣٢- معامل انحدار عدد الوحدات المنتجة على عدد ساعات العمل هو:

(أ) ٠,٩٦	(ب) - ٠,٩٦	(ج) ٣	(د) - ٣

٣٣- ثابت الانحدار هو:

(أ) - ٣	(ب) ٣	(جـ) ٠,٩٦	(د) - ٠,٩٦

٣٤- معامل التحديد هو:

(أ) ٠,٨٠	(ب) ٠,٩٦	(جـ) - ٣	(د) ٠,٦٤

٣٥- عدد الوحدات المتوقع انتاجها عندما تكون عدد ساعات العمل ٦٠ ساعة لأقرب رقم صحيح هو:

(أ) ٥٥	(ب) ٥٤	(جـ) ٥٣	(د) ٥٢

الجداول الاحصائية

التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٠,٠٠	٠,٥٠٠٠٠	٠,٢٩	٠,٦١٤٠٩	٠,٥٨	٠,٧١٩٠٤
٠,٠١	٠,٥٠٣٩٩	٠,٣٠	٠,٦١٧٩١	٠,٥٩	٠,٧٢٢٤٠
٠,٠٢	٠,٥٠٧٩٨	٠,٣١	٠,٦٢١٧٢	٠,٦٠	٠,٧٢٥٧٥
٠,٠٣	٠,٥١١٩٧	٠,٣٢	٠,٦٢٥٥٢	٠,٦١	٠,٧٢٩٠٧
٠,٠٤	٠,٥١٥٩٥	٠,٣٣	٠,٦٢٩٣٠	٠,٦٢	٠,٧٣٢٣٧
٠,٠٥	٠,٥١٩٩٤	٠,٣٤	٠,٦٣٣٠٧	٠,٦٣	٠,٧٣٥٦٥
٠,٠٦	٠,٥٢٣٩٢	٠,٣٥	٠,٦٣٣٠٧	٠,٦٤	٠,٧٣٨٩١
٠,٠٧	٠,٥٢٧٩٠	٠,٣٦	٠,٦٤٠٥٨	٠,٦٥	٠,٧٤٢١٥
٠,٠٨	٠,٥٣١٨٦	٠,٣٧	٠,٦٤٤٣١	٠,٦٦	٠,٧٤٥٣٧
٠,٠٩	٠,٥٣٥٨٦	٠,٣٨	٠,٦٤٨٠٣	٠,٦٧	٠,٧٤٨٥٧
٠,١٠	٠,٥٣٩٨٣	٠,٣٩	٠,٦٥١٧٣	٠,٦٨	٠,٧٥١٧٥
٠,١١	٠,٥٤٣٨٠	٠,٤٠	٠,٦٥٥٤٢	٠,٦٩	٠,٧٥٤٩٠
٠,١٢	٠,٥٤٧٧٦	٠,٤١	٠,٦٥٩١٠	٠,٧٠	٠,٧٥٨٠٤
٠,١٣	٠,٥٥١٧٢	٠,٤٢	٠,٦٦٢٧٦	٠,٧١	٠,٧٦١١٥
٠,١٤	٠,٥٥٥٦٧	٠,٤٣	٠,٦٦٦٤٠	٠,٧٢	٠,٧٦٤٢٤
٠,١٥	٠,٥٥٩٦٢	٠,٤٤	٠,٦٧٠٠٣	٠,٧٣	٠,٧٦٧٣٠
٠,١٦	٠,٥٦٣٥٦	٠,٤٥	٠,٦٧٣٦٤	٠,٧٤	٠,٧٧٠٣٥
٠,١٧	٠,٥٦٧٤٩	٠,٤٦	٠,٦٧٧٢٤	٠,٧٥	٠,٧٧٣٣٧
٠,١٨	٠,٥٧١٤٢	٠,٤٧	٠,٦٨٠٨٢	٠,٧٦	٠,٧٧٦٣٧
٠,١٩	٠,٥٧٥٣٥	٠,٤٨	٠,٦٨٤٣٩	٠,٧٧	٠,٧٧٩٣٥
٠,٢٠	٠,٥٧٩٢٦	٠,٤٩	٠,٦٨٧٩٣	٠,٧٨	٠,٧٨٢٣٠
٠,٢١	٠,٥٨٣١٧	٠,٥٠	٠,٦٩١٤٦	٠,٧٩	٠,٧٨٥٢٤
٠,٢٢	٠,٥٨٧٠٦	٠,٥١	٠,٦٩٤٩٧	٠,٨٠	٠,٧٨٨١٤
٠,٢٣	٠,٥٩٠٩٥	٠,٥٢	٠,٦٩٨٤٧	٠,٨١	٠,٧٩١٠٣
٠,٢٤	٠,٥٩٤٨٣	٠,٥٣	٠,٧٠١٩٤	٠,٨٢	٠,٧٩٣٨٩
٠,٢٥	٠,٥٩٨٧٧	٠,٥٤	٠,٧٠٥٤٠	٠,٨٣	٠,٧٩٦٧٣
٠,٢٦	٠,٦٠٢٥٧	٠,٥٥	٠,٧٠٨٨٤	٠,٨٤	٠,٧٩٩٥٥
٠,٢٧	٠,٦٠٦٤٢	٠,٥٦	٠,٧١٢٢٦	٠,٨٥	٠,٨٠٢٣٤
٠,٢٨	٠,٦١٠٢٦	٠,٥٧	٠,٧١٥٦٦	٠,٨٦	٠,٨٠٥١١

تابع التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٠,٨٧	٠,٨٠٧٨٥	١,١٦	٠,٨٧٦٩٨	١,٤٥	٠,٩٢٦٤٧
٠,٨٨	٠,٨١٠٥٧	١,١٧	٠,٨٧٩٠٠	١,٤٦	٠,٩٢٧٨٦
٠,٨٩	٠,٨١٣١٧	١,١٨	٠,٨٨١٠٠	١,٤٧	٠,٩٢٩٢٢
٠,٩٠	٠,٨١٥٩٤	١,١٩	٠,٨٨٢٩٨	١,٤٨	٠,٩٣٠٥٦
٠,٩١	٠,٨١٨٥٩	١,٢٠	٠,٨٨٤٩٣	١,٤٩	٠,٩٣١٨٩
٠,٩٢	٠,٨٢١٢١	١,٢١	٠,٨٨٦٨٦	١,٥٠	٠,٩٣٣١٩
٠,٩٣	٠,٨٢٣٨١	١,٢٢	٠,٨٨٨٧٧	١,٥١	٠,٩٣٤٤٨
٠,٩٤	٠,٨٢٦٢٩	١,٢٣	٠,٨٩٠٦٥	١,٥٢	٠,٩٣٥٧٤
٠,٩٥	٠,٨٢٨٩٤	١,٢٤	٠,٨٩٢٥١	١,٥٣	٠,٩٣٦٩٩
٠,٩٦	٠,٨٣١٤٧	١,٢٥	٠,٨٩٤٣٥	١,٥٤	٠,٩٣٨٢٢
٠,٩٧	٠,٨٣٣٩٨	١,٢٦	٠,٨٩٦١٧	١,٥٥	٠,٩٣٩٤٣
٠,٩٨	٠,٨٣٦٤٦	١,٢٧	٠,٨٩٧٩٦	١,٥٦	٠,٦٢٩٤٠
٠,٩٩	٠,٨٣٨٩١	١,٢٨	٠,٨٩٩٧٣	١,٥٧	٠,٩٤١٧٩
١,٠٠	٠,٨٤١٣٤	١,٢٩	٠,٩٠١٤٧	١,٥٨	٠,٩٤٢٩٥
١,٠١	٠,٨٤٣٧٥	١,٣٠	٠,٩٠٣٢٠	١,٥٩	٠,٩٤٤٠٨
١,٠٢	٠,٨٤٦١٤	١,٣١	٠,٩٠٤٩٠	١,٦٠	٠,٩٤٥٢٠
١,٠٣	٠,٨٤٨٥٠	١,٣٢	٠,٩٠٦٥٨	١,٦١	٠,٩٤٦٣٠
١,٠٤	٠,٨٥٠٨٣	١,٣٣	٠,٩٠٨٢٤	١,٦٢	٠,٩٤٧٣٨
١,٠٥	٠,٨٥٣١٤	١,٣٤	٠,٩٠٩٨٨	١,٦٣	٠,٩٤٨٤٥
١,٠٦	٠,٨٥٥٤٣	١,٣٥	٠,٩١١٤٩	١,٦٤	٠,٩٤٩٥٠
١,٠٧	٠,٨٥٧٦٩	١,٣٦	٠,٩١٣٠٩	١,٦٥	٠,٩٥٠٥٣
١,٠٨	٠,٨٥٩٩٣	١,٣٧	٠,٩١٤٦٦	١,٥٦	٠,٦٢٩٤٠
١,٠٩	٠,٨٦٢١٤	١,٣٨	٠,٩١٦٢١	١,٥٧	٠,٩٤١٧٩
١,١٠	٠,٨٦٤٣٣	١,٣٩	٠,٩١٧٧٤	١,٥٨	٠,٩٤٢٩٥
١,١١	٠,٨٦٦٥٠	١,٤٠	٠,٩١٩٢٤	١,٥٩	٠,٩٤٤٠٨
١,١٢	٠,٨٦٨٦٤	١,٤١	٠,٩٢٠٧٣	١,٦٠	٠,٩٤٥٢٠
١,١٣	٠,٨٧٠٧٦	١,٤٢	٠,٩٢٢٢٠	١,٦١	٠,٩٤٦٣٠
١,١٤	٠,٨٧٢٨٦	١,٤٣	٠,٩٢٣٦٤	١,٦٢	٠,٩٤٧٣٨
١,١٥	٠,٨٧٤٩٣	١,٤٤	٠,٩٢٥٠٧	١,٦٣	٠,٩٤٨٤٥

تابع التوزيع الطبيعى المعيارى

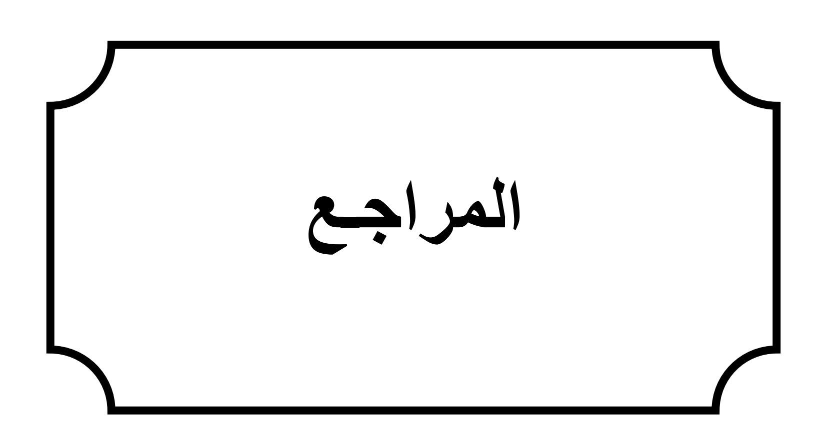
ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
١,٦٤	٠,٩٤٩٥٠	١,٩٣	٠,٩٧٣٢٠	٢,٢٢	٠,٩٨٦٧٩
١,٦٥	٠,٩٥٠٥٣	١,٩٤	٠,٩٧٣٨١	٢,٢٣	٠,٩٨٧١٣
١,٦٦	٠,٩٥١٥٤	١,٩٥	٠,٩٧٤٤١	٢,٢٤	٠,٩٨٧٤٥
١,٦٧	٠,٩٥٢٥٤	١,٩٦	٠,٩٧٥٠٠	٢,٢٥	٠,٩٨٧٧٨
١,٦٨	٠,٩٥٣٥٢	١,٩٧	٠,٩٧٥٥٨	٢,٢٦	٠,٩٨٨٠٩
١,٦٩	٠,٩٥٤٤٩	١,٩٨	٠,٩٧٦١٥	٢,٢٧	٠,٩٨٨٤٠
١,٧٠	٠,٩٥٥٤٣	١,٩٩	٠,٩٧٦٧٠	٢,٢٨	٠,٩٨٨٧٠
١,٧١	٠,٩٥٦٣٦	٢,٠٠	٠,٩٧٧٢٥	٢,٢٩	٠,٩٨٨٩٩
١,٧٢	٠,٩٥٧٢٨	٢,٠١	٠,٩٧٧٧٥	٢,٣٠	٠,٩٨٩٢٨
١,٧٣	٠,٩٥٨١٨	٢,٠٢	٠,٩٧٨٣١	٢,٣١	٠,٩٨٩٥٦
١,٧٤	٠,٩٥٩٠٧	٢,٠٣	٠,٩٧٨٨٢	٢,٣٢	٠,٩٨٩٨٣
١,٧٥	٠,٩٥٩٩٤	٢,٠٤	٠,٩٧٩٣٢	٢,٣٣	٠,٩٩٠١٠
١,٧٦	٠,٩٦٠٨٠	٢,٠٥	٠,٩٧٩٨٢	٢,٣٤	٠,٩٩٠٣٦
١,٧٧	٠,٩٦١٦٤	٢,٠٦	٠,٩٨٠٣٠	٢,٣٥	٠,٩٩٠٦١
١,٧٨	٠,٩٦٢٤٦	٢,٠٧	٠,٩٨٠٧٧	٢,٣٦	٠,٩٩٠٨٦
١,٧٩	٠,٩٦٣٢٧	٢,٠٨	٠,٩٨١٢٤	٢,٣٧	٠,٩٩١١١
١,٨٠	٠,٩٦٤٠٧	٢,٠٩	٠,٩٨١٦٩	٢,٣٨	٠,٩٩١٣٤
١,٨١	٠,٩٦٤٨٥	٢,١٠	٠,٩٨٢١٤	٢,٣٩	٠,٩٩١٥٨
١,٨٢	٠,٩٦٥٦٢	٢,١١	٠,٩٨٢٥٧	٢,٤٠	٠,٩٩١٨٠
١,٨٣	٠,٩٦٦٣٨	٢,١٢	٠,٩٨٣٠٠	٢,٤١	٠,٩٩٢٠٢
١,٨٤	٠,٩٦٧١٢	٢,١٣	٠,٩٨٣١٤	٢,٤٢	٠,٩٩٢٢٤
١,٨٥	٠,٨٤٩٦٧	٢,١٤	٠,٩٨٣٨٢	٢,٤٣	٠,٩٩٢٤٥
١,٨٦	٠,٩٦٨٥٦	٢,١٥	٠,٩٨٤٢٢	٢,٤٤	٠,٩٩٢٦٦
١,٨٧	٠,٩٦٩٢٦	٢,١٦	٠,٩٨٤٦١	٢,٤٥	٠,٩٩٢٨٦
١,٨٨	٠,٩٦٩٩٥	٢,١٧	٠,٩٨٥٠٠	٢,٤٦	٠,٩٩٣٠٥
١,٨٩	٠,٩٧٠٦٢	٢,١٨	٠,٩٨٥٣٧	٢,٤٧	٠,٩٩٣٢٤
١,٩٠	٠,٩٧١٢٨	٢,١٩	٠,٩٨٥٧٤	٢,٤٨	٠,٩٩٣٤٣
١,٩١	٠,٩٧١٩٣	٢,٢٠	٠,٩٨٦١٠	٢,٤٩	٠,٩٩٣٦١
١,٩٢	٠,٩٧٢٥٧	٢,٢١	٠,٩٨٦٤٥	٢,٥٠	٠,٩٩٣٧٩

تابع التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٢,٥١	٠,٩٩٣٩٦	٢,٨٠	٠,٩٩٧٤٤	٣,٠٩	٠,٩٩٩٠٠
٢,٥٢	٠,٩٩٤١٣	٢,٨١	٠,٩٩٧٥٢	٣,١٠	٠,٩٩٩٠٣
٢,٥٣	٠,٩٩٤٣٠	٢,٨٢	٠,٩٩٧٦٠	٣,١١	٠,٩٩٩٠٦
٢,٥٤	٠,٩٩٤٤٦	٢,٨٣	٠,٩٩٧٦٧	٣,١٢	٠,٩٩٩١٠
٢,٥٥	٠,٩٩٤٦١	٢,٨٤	٠,٩٩٧٧٤	٣,١٣	٠,٩٩٩١٣
٢,٥٦	٠,٩٩٤٧٧	٢,٨٥	٠,٩٩٧٨١	٣,١٤	٠,٩٩٩١٦
٢,٥٧	٠,٩٩٤٩٢	٢,٨٦	٠,٩٩٧٨٨	٣,١٥	٠,٩٩٩١٨
٢,٥٨	٠,٩٩٥٠٦	٢,٨٧	٠,٩٩٧٩٥	٣,١٦	٠,٩٩٩٢١
٢,٥٩	٠,٩٩٥٢٠	٢,٨٨	٠,٩٩٨٠١	٣,١٧	٠,٩٩٩٢٤
٢,٦٠	٠,٩٩٥٣٤	٢,٨٩	٠,٩٩٨٠٧	٣,١٨	٠,٩٩٩٢٦
٢,٦١	٠,٩٩٥٤٧	٢,٩٠	٠,٩٩٨١٣	٣,١٩	٠,٩٩٩٢٩
٢,٦٢	٠,٩٩٥٦٠	٢,٩١	٠,٩٩٨١٩	٣,٢٠	٠,٩٩٩٣١
٢,٦٣	٠,٩٩٥٧٣	٢,٩٢	٠,٩٩٨٢٥	٣,٢١	٠,٩٩٩٣٤
٢,٦٤	٠,٩٩٥٨٥	٢,٩٣	٠,٩٩٨٣١	٣,٢٢	٠,٩٩٩٣٦
٢,٦٥	٠,٩٩٥٩٨	٢,٩٤	٠,٩٩٨٣٦	٣,٢٣	٠,٩٩٩٣٨
٢,٦٦	٠,٩٩٦٠٩	٢,٩٥	٠,٩٩٨٤١	٣,٢٤	٠,٩٩٩٤٠
٢,٦٧	٠,٩٩٦٢١	٢,٩٦	٠,٩٩٨٤٦	٣,٢٥	٠,٩٩٩٤٢
٢,٦٨	٠,٩٩٦٣٢	٢,٩٧	٠,٩٩٨٥١	٣,٢٦	٠,٩٩٩٤٤
٢,٦٩	٠,٩٩٦٤٣	٢,٩٨	٠,٩٩٨٥٦	٣,٢٧	٠,٩٩٩٤٦
٢,٧٠	٠,٩٩٦٥٣	٢,٩٩	٠,٩٩٨٦١	٣,٢٨	٠,٩٩٩٤٨
٢,٧١	٠,٩٩٦٦٤	٣,٠٠	٠,٩٩٨٦٥	٣,٢٩	٠,٩٩٩٥٠
٢,٧٢	٠,٩٩٦٧٤	٣,٠١	٠,٩٩٨٦٩	٣,٣٠	٠,٩٩٩٥٢
٢,٧٣	٠,٩٩٦٨٣	٣,٠٢	٠,٩٩٨٧٤	٣,٣١	٠,٩٩٩٥٣
٢,٧٤	٠,٩٩٦٩٣	٣,٠٣	٠,٩٩٨٧٨	٣,٣٢	٠,٩٩٩٥٥
٢,٧٥	٠,٩٩٧٠٢	٣,٠٤	٠,٩٩٨٢	٢,٣٣	٠,٩٩٩٥٧
٢,٧٦	٠,٩٩٧١١	٣,٠٥	٠,٩٩٨٨٦	٣,٣٤	٠,٩٩٩٥٨
٢,٧٧	٠,٩٩٧٢٠	٣,٠٦	٠,٩٩٨٨٩	٣,٣٥	٠,٩٩٩٦٠
٢,٧٨	٠,٩٩٧٢٨	٣,٠٧	٠,٩٩٨٩٣	٣,٣٦	٠,٩٩٩٦١
٢,٧٩	٠,٩٩٧٣٦	٣,٠٨	٠,٩٩٨٩٧	٣,٣٧	٠,٩٩٩٦٢

تابع التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٣,٣٨	٠,٩٩٩٦٤	٣,٦٧	٠,٩٩٩٨٨	٣,٩٦	٠,٩٩٩٩٦
٣,٣٩	٠,٩٩٩٦٥	٣,٦٨	٠,٩٩٩٨٨	٣,٩٧	٠,٩٩٩٩٦
٣,٤٠	٠,٩٩٩٦٦	٣,٦٩	٠,٩٩٩٨٩	٣,٩٨	٠,٩٩٩٩٧
٣,٤١	٠,٩٩٩٦٨	٣,٧٠	٠,٩٩٩٨٩	٣,٩٩	٠,٩٩٩٩٧
٣,٤٢	٠,٩٩٩٦٩	٣,٧١	٠,٩٩٩٩٠	٤,٠٠	٠,٩٩٩٩٧
٣,٤٣	٠,٩٩٩٧٠	٣,٧٢	٠,٩٩٩٩٠		
٣,٤٤	٠,٩٩٩٧١	٣,٧٣	٠,٩٩٩٩٠		
٣,٤٥	٠,٩٩٩٧٢	٣,٧٤	٠,٩٩٩٩١		
٣,٤٦	٠,٩٩٩٧٣	٣,٧٥	٠,٩٩٩٩١		
٣,٤٧	٠,٩٩٩٧٤	٣,٧٦	٠,٩٩٩٩٢		
٣,٤٨	٠,٩٩٩٧٥	٣,٧٧	٠,٩٩٩٩٢		
٣,٤٩	٠,٩٩٩٧٦	٣,٧٨	٠,٩٩٩٩٢		
٣,٥٠	٠,٩٩٩٧٧	٣,٧٩	٠,٩٩٩٩٢		
٣,٥١	٠,٩٩٩٧٨	٣,٨٠	٠,٩٩٩٩٣		
٣,٥٢	٠,٩٩٩٧٨	٣,٨١	٠,٩٩٩٩٣		
٣,٥٣	٠,٩٩٩٧٩	٣,٨٢	٠,٩٩٩٩٣		
٣,٥٤	٠,٩٩٩٨٠	٣,٨٣	٠,٩٩٩٩٤		
٣,٥٥	٠,٩٩٩٨١	٣,٨٤	٠,٩٩٩٩٤		
٣,٥٦	٠,٩٩٩٨١	٣,٨٥	٠,٩٩٩٩٤		
٣,٥٧	٠,٩٩٩٨٢	٣,٨٦	٠,٩٩٩٩٤		
٣,٥٨	٠,٩٩٩٨٣	٣,٨٧	٠,٩٩٩٩٥		
٣,٥٩	٠,٩٩٩٨٣	٣,٨٨	٠,٩٩٩٩٥		
٣,٦٠	٠,٩٩٩٨٤	٣,٨٩	٠,٩٩٩٩٥		
٣,٦١	٠,٩٩٩٨٥	٣,٩٠	٠,٩٩٩٩٥		
٣,٦٢	٠,٩٩٩٨٥	٣,٩١	٠,٩٩٩٩٥		
٣,٦٣	٠,٩٩٩٨٦	٣,٩٢	٠,٩٩٩٩٦		
٣,٦٤	٠,٩٩٩٨٦	٣,٩٣	٠,٩٩٩٩٦		
٣,٦٥	٠,٩٩٩٨٧	٣,٩٤	٠,٩٩٩٩٦		
٣,٦٦	٠,٩٩٩٨٧	٣,٩٥	٠,٩٩٩٩٦		



المراجع

أولاً: المراجع العربية:

١- إبراهيم محمد مهدى، سلطان محمد عبد الحميد، الإحصاء التطبيقى، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة، ١٩٨٧.

٢- أحمد عبد السميع طبية "مبادئ الاحصاء" الطبعةالاولى ١٤٢٩هـ – ٢٠٠٨ م – دار البداية

٣- أحمد عودة، مقدمة فى النظرية الإحصائية، مطابع جامعة الملك سعود، السعودية، ١٩٩١.

٤- أحمد محمد عمر، تطبيقات الطرق الإحصائية، بدون ناشر، ١٩٨١.

٥- السيد عبده ناجى، الرقابة على الأداء من الناحية العلمية والعملية، دار الفكر العربى، القاهرة، ١٩٧٩.

٦- بول. ج. هويل، المبادئ الأولية فى الإحصاء، ترجمة بدرية عبد الوهاب ومحمد الشربينى، الطبعة الرابعة المنقحة Awiley Arabook ، ١٩٨٤.

٧- سمير كامل عاشور، مقدمة فى الإحصاء الوصفى، معهد الإحصاء، جامعة القاهرة.

٨- سمير كامل عاشور، مقدمة فى الإحصاء التحليلى، معهد الإحصاء، جامعة القاهرة.

٩- شفيق العتوم، مقدمة فى الأساليب الإحصائية، مطبعة التاج، عمان، الأردن، ١٩٩٢.

١٠-شوقى سيف النصر سيد – الإحصاء الوصفى والتحليلى – جامعة القاهرة – ٢٠١٥

١١-عبد المجيد فراج، الأسلوب الإحصائى، دار النهضة العربية، القاهرة، ١٩٨٣.

١٢-عبد اللطيف عبد الفتاح، مقدمة فى التحليل الإحصائى، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة ٩٧/١٩٩٨.

١٣-على السيد الديب – الإحصاء (المبادئ النظرية وتطبيقاتها العملية) – جامعة القاهرة – ٢٠١٢

١٤-فاروق عبد العظيم، عبد المرضى عزام، يحيى زغلول، مقدمة فى طرق البحث الإحصائى وتحليل الظواهر، دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية، ١٩٨٢.

١٥- محمد توفيق المنصورى، شوقى سيف النصر، مبادئ الإحصاء الوصفى والتحليلى، الطبعة الأولى، ٩٩/٢٠٠٠.

١٦- محمد صلاح الدين صدقى، مبادئ النظرية الإحصائية وتطبيقاتها فى المشروعات التجارية والصناعية، الطبعة الحادية عشر، مكتبة عين شمس، القاهرة، ٢٠٠٠.

١٧-محمد فتحى محمد على، المفاهيم الأساسية للإحصاء، مكتبة عين شمس، القاهرة، ١٩٨٧/٨٦.

١٨- محمود محمد صفوت، مراحل البحث الإحصائى، الطبعة الأولى، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ١٩٦٢.

١٩- ممدوح حمزة أحمد، النظرية الإحصائية واتخاذ القرار فى التأمين والإدارة، دار النهضة العربية، القاهرة، ١٩٩٢.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

1- Alexander M. Mood, et al., Introduction to the theory of statistics, third edition, McGraw Hill, 1974.

2- Gerald Keller, Brian Warrack, Statistics for management and economics, fourth edition, Brooks/Cole publishing company, U.S.A., 1998.

3- Paul G. Hoel, Elementary statistics, fourth edition, John Wiley & Sons Inc., 1976.

4- William J. Stevenson, Business statistics, second edition, Harper & Row publishers, New York, 1985.

الفهرس